

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Tecnologia e Geociências  
Departamento de Engenharia Mecânica

## **A MOTO POR DENTRO**

Fábio Magnani

# Conteúdo

1	Introdução . . . . .	3
2	Sistemas da Moto . . . . .	3
3	Descrição do Sistema de Potência . . . . .	8
3.1	Mecanismo do Motor . . . . .	8
3.2	Caminho da Mistura Gasosa . . . . .	11
3.3	Mecanismo da Transmissão . . . . .	11
3.4	Mecanismo do Freio . . . . .	17
4	A Potência Através da Transmissão . . . . .	18
4.1	Curvas do Motor . . . . .	20
4.2	Cinemática da Transmissão . . . . .	29
4.3	Caminho da Potência na Transmissão . . . . .	33
4.4	Equação Geral do Movimento da Moto . . . . .	36
4.5	Consumo de Energia e Eficiência . . . . .	41
4.6	Solução Computacional . . . . .	44
4.7	Estudo de Casos . . . . .	48
5	Conclusão . . . . .	61



# 1 Introdução

As motos, como todas as coisas, podem ser estudadas das mais variadas formas. De um jeito mais amplo, podemos estudar vários aspectos do seu uso, como por exemplo como ela se relaciona com a sociedade, com a história, política, cultura, economia, saúde, lazer e com a arte<sup>1</sup>. Podemos também analisar como ela se relaciona com o mundo material, através do seu movimento e das forças, como vimos nas aulas passadas<sup>2</sup>. Hoje vamos continuar com essa visão física, mas agora estudando o seu interior. A Figura 1 representa a progressão do nosso ponto de vista. Olhávamos para as forças sobre o conjunto, agora passaremos a olhar somente a moto, e, em particular na aula de hoje, para dentro da moto.

## 2 Sistemas da Moto

A motocicleta (moto+cicleta) pode ser dividida em duas partes. A parte do movimento (*i.e.*, quadro, corpo, rodas, direção e suspensão) e a parte de potência (*i.e.*, motor, transmissão e freios). A Figura 2 mostra a moto completa, seu sistema de movimento e o seu sistema de potência. *Grosso modo*, podemos dizer que o sistema de movimento é parecido com uma bicicleta e o sistema de potência é parecido com a motorização dos carros.

A classificação proposta aqui é bastante pessoal, podendo ser vista de outras formas por outros autores. Quem quiser saber mais sobre os detalhes pode olhar nos manuais de serviço de modelos específicos ou nos trabalhos

---

<sup>1</sup> *Visões das Motocicletas* de Magnani (2020c).

<sup>2</sup> *Física Básica das Motos* de Magnani (2020a) e *Solução Computacional do Movimento das Motos* Magnani (2020b)

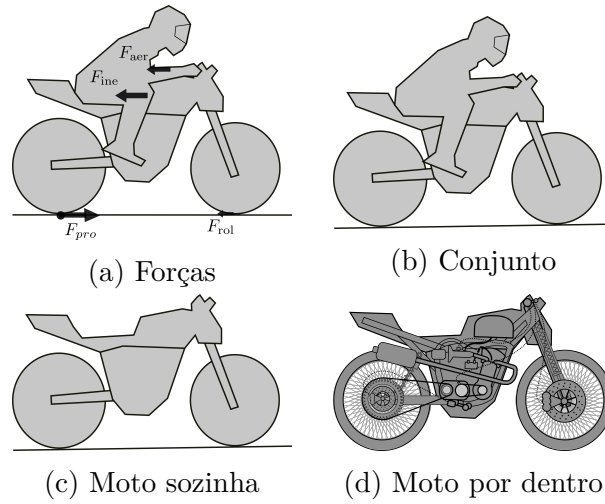


Figura 1: Visão geral da moto.

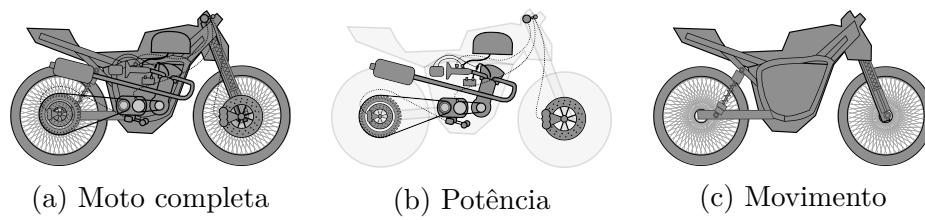


Figura 2: Sistema de potência e sistema de movimento (moto+cicleta).

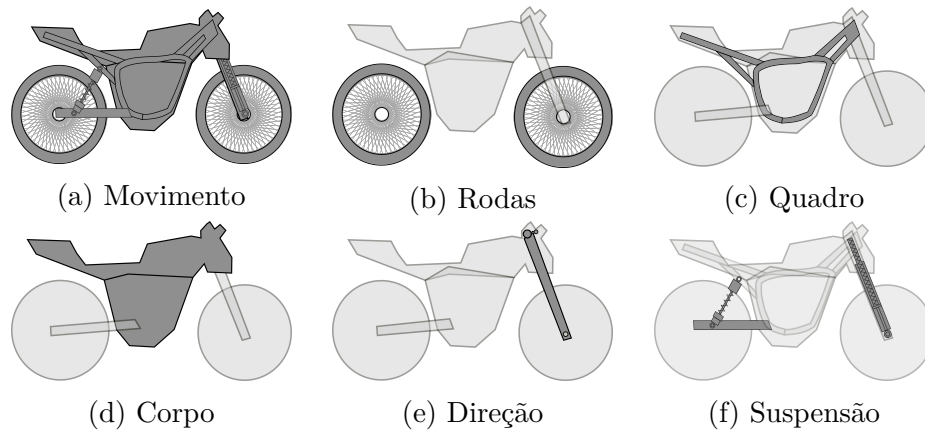


Figura 3: Sistema de movimento da moto

de Haynes (2002), Zimmerman (2004), Abdo (2012), e Clarke (2010), que tratam das motos gerais; ou Cameron (2009) e Spalding (2010), que falam especificamente sobre motos de corrida. Já que uma parte do sistema de potência das motos é parecida com a dos carros, pode valer a pena olhar também em Hoag (2006), Heisler (1995) e Bosch (2007).

A Figura 3 mostra os componentes principais do sistema de movimento da moto, com suas rodas (cada uma formada pelo cubo, raios, aro e pneu), quadro, corpo (que tem função estética e aerodinâmica), direção (guidão e garfo) e suspensão (mola, amortecedor e mecanismo)<sup>3</sup>. A Figura 4 detalha o sistema de potência, com tanque, motor (válvulas, pistão, biela e manivela), controle eletrônico (corpo do acelerador/injeção, central eletrônica, bateria e bobina), escape, transmissão primária, transmissão final, caixa de marchas, freios e controles do piloto (embreagem, freio dianteiro, freio traseiro, acelerador e marcha). A Figura 5 repete (em tamanho maior) todo o sistema de potência, e a Figura 6 inclui o sistema de controle do piloto.

A Figura 7 mostra os principais componentes do sistema de potência de uma moto elétrica, no qual podemos ver que alguns são comuns às motos convencionais. A Figura 8 especifica o que há de comum entre as motos convencionais e as motos elétricas (quadro, suspensão, direção, rodas, corpo, transmissão e freios) e o que é específico a cada uma delas.

<sup>3</sup>Essa classificação é bastante genérica, pois alguns componentes, como o garfo, fazem parte ao mesmo tempo do subsistema de direção e do subsistema de amortecimento dianteiro

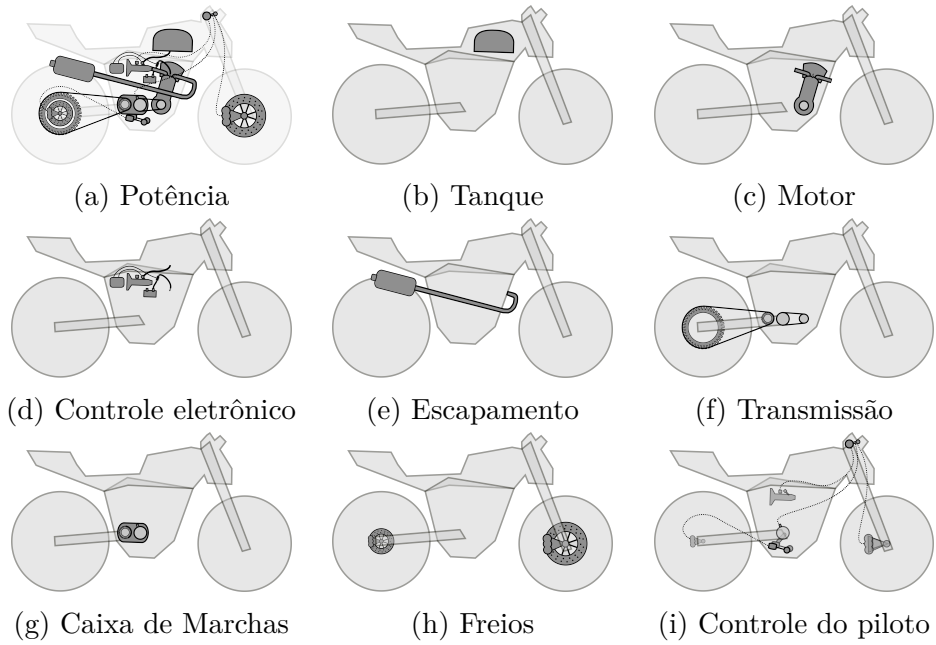


Figura 4: Sistema de potência da moto

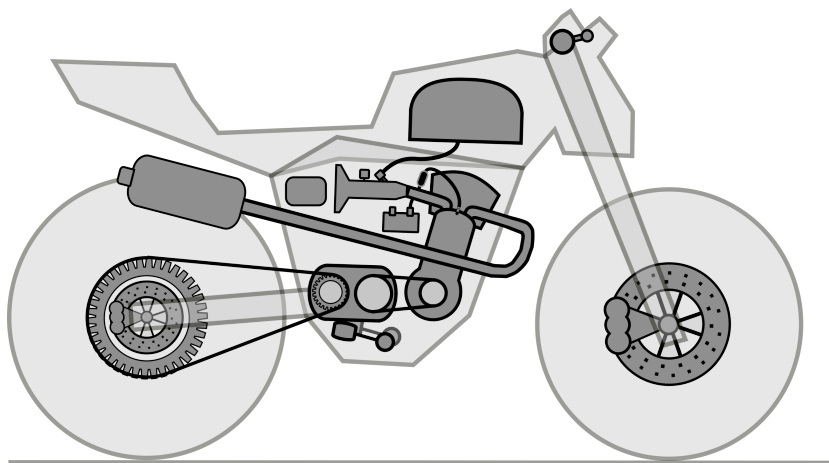


Figura 5: Sistema de potência em detalhes.

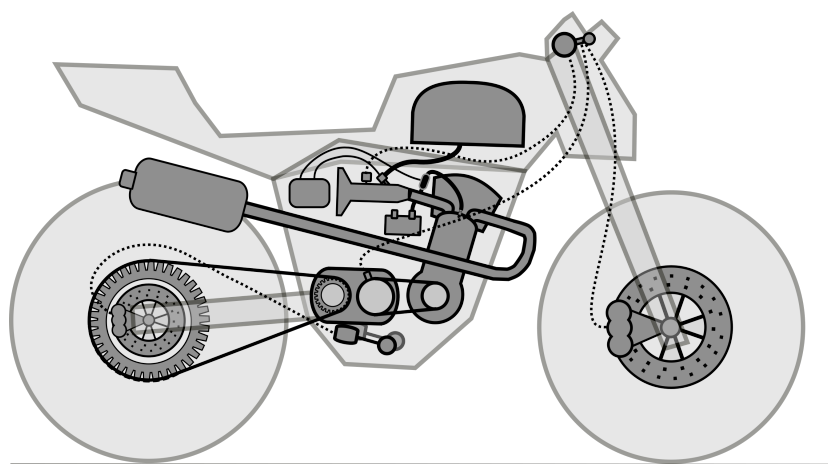


Figura 6: Sistema de potência em detalhes, incluindo os controles do piloto.

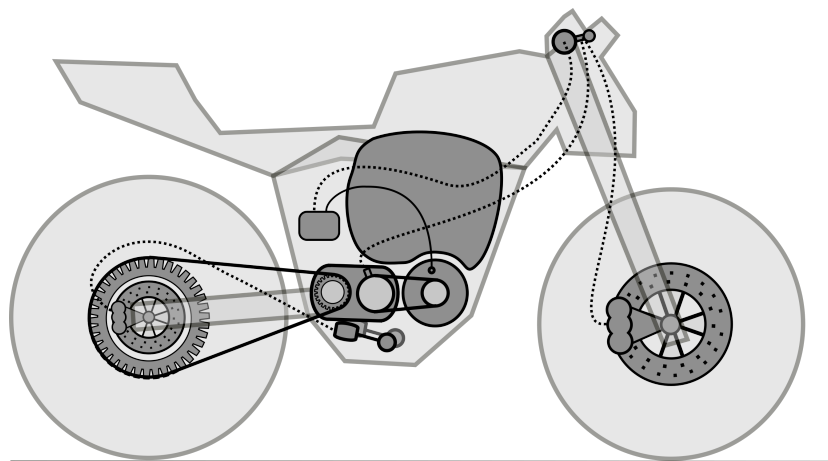


Figura 7: Sistema de potência da moto elétrica em detalhes, incluindo os controles do piloto.

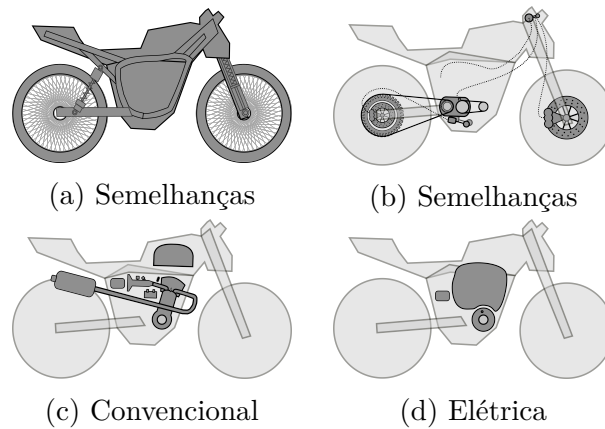


Figura 8: Comparação entre a moto convencional e a moto elétrica

### 3 Descrição do Sistema de Potência

O sistema de movimento será objeto de estudo em apostilas posteriores. O sistema de potência, por sua vez, pode ser dividido em três subsistemas: subsistema do motor, subsistema da transmissão e subsistema de frenagem. Vamos ver cada um deles nas próximas subseções.

#### 3.1 Mecanismo do Motor

A Figura 9 mostra o subsistema do motor, composta do motor propriamente dito (bloco, cabeçote, válvulas, pistão, biela e manivela), tanque, admissão da mistura e descarga dos gases de combustão.

Olhando para o motor, a Figura 10 mostra como é o seu ciclo mecânico, *i.e.*, o que acontece com o mecanismo biela-manivela enquanto o motor gira. Esse mecanismo é bastante importante, pois converte o movimento alternativo<sup>4</sup> do pistão em um movimento rotativo, fundamental para girar a roda<sup>5</sup>. A Figura 11 mostra em detalhe como o came, ao girar, atua sobre as válvulas de admissão e de descarga. A última linha da figura mostra a correspondência entre a posição do virabrequim e a posição do came. Na Figura 12 vemos como é o mecanismo que sincroniza o movimento do virabrequim com o movimento das válvulas<sup>6</sup>. O papel das válvulas é controlar o movimento dos gases para dentro e fora do cilindro.

<sup>4</sup>Para cima e para baixo

<sup>5</sup>A roda, por sua vez, faz parte de um mecanismo que transforma o movimento rotativo da coroa no movimento linear da moto como um todo

<sup>6</sup>Para dois giros do virabrequim, o eixo do comando de válvulas gira uma vez.

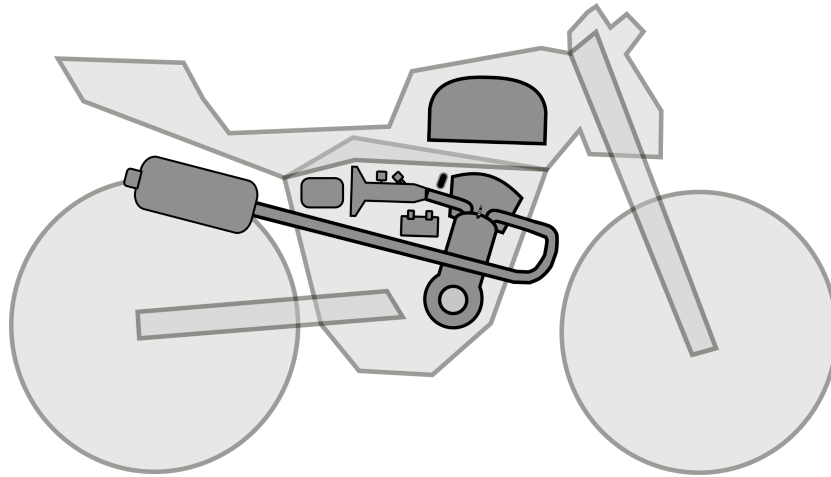


Figura 9: Subsistema do motor

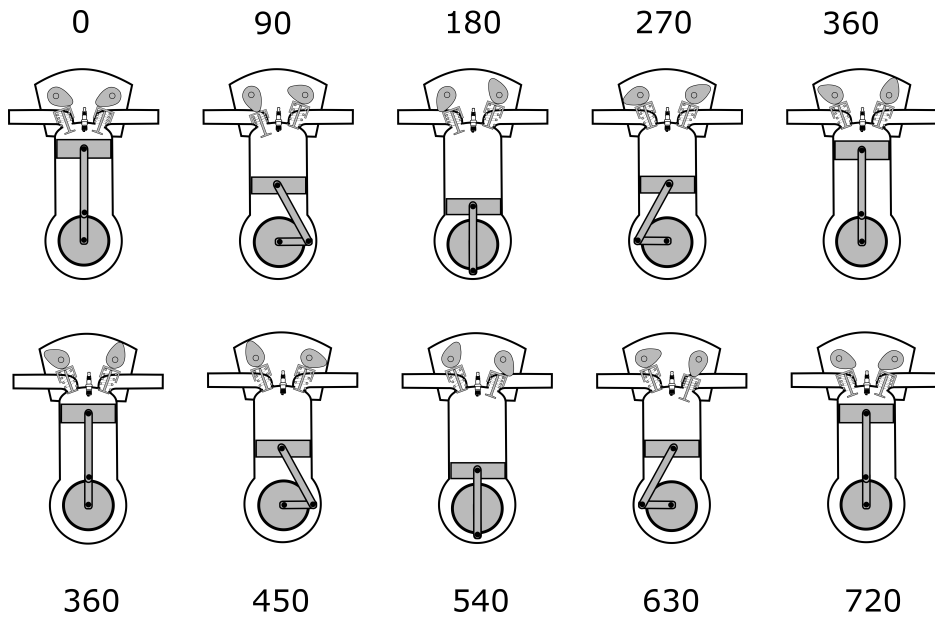


Figura 10: Ciclo mecânico.

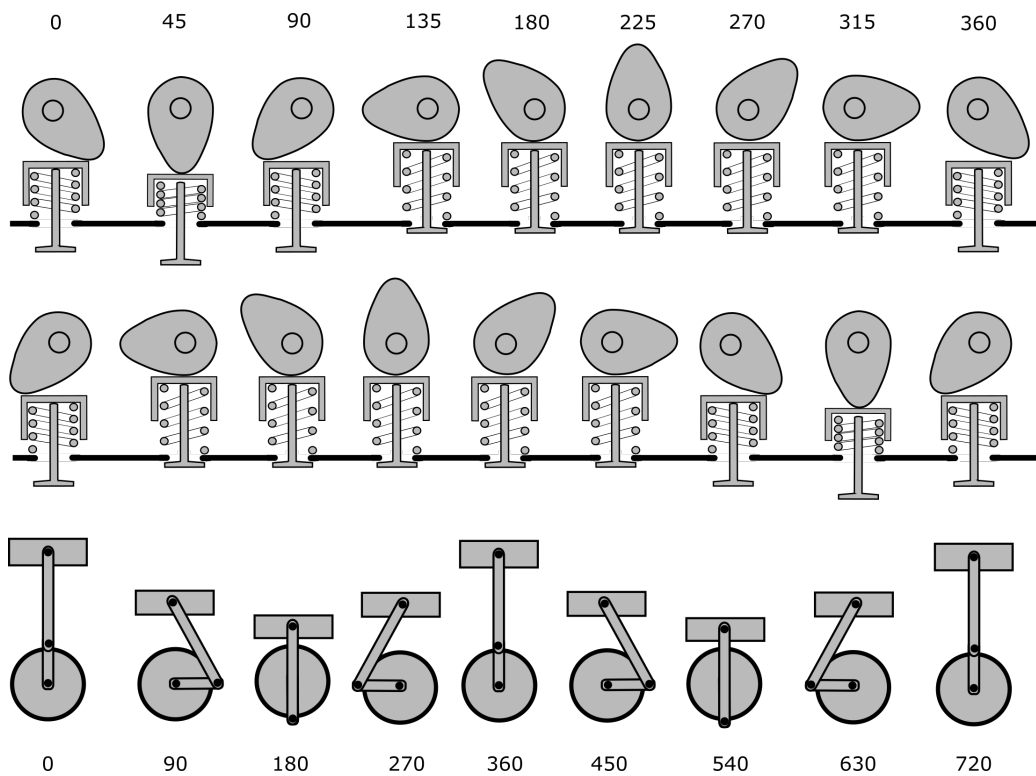


Figura 11: Abertura das Válvulas. Superior: admissão; central: descarga; inferior virabrequim.

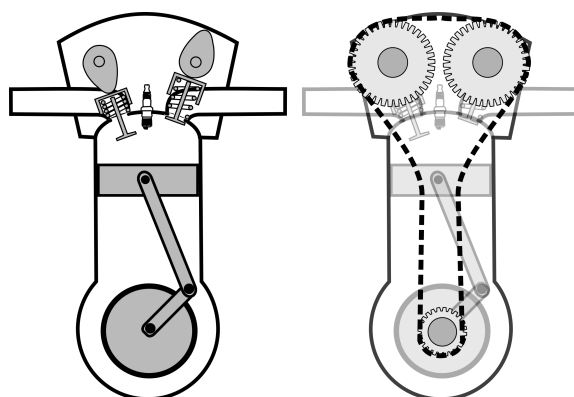


Figura 12: Comando de válvulas.



### 3.2 Caminho da Mistura Gasosa

Até agora vimos o motor com um sistema de peças sólidas. Outra forma é olhar para o caminho da mistura gasosa que o percorre. A Figura 13 mostra o ciclo mecânico na linha superior e o ciclo dos gases na linha inferior<sup>7</sup>. Observando a linha de baixo, quando o virabrequim gira de 0 a 180°<sup>8</sup>, a válvula de admissão é aberta, permitindo que o motor aspire a mistura ar-combustível. No intervalo 180 a 360° a mistura é então comprimida. Depois, durante a primeira parte da descida do pistão, há a queima da mistura. Durante toda a descida o pistão realiza trabalho sobre o mecanismo. Na parte final, de 540 a 720°, os gases de combustão saem do cilindro a caminho do escape. A próxima apostila será dedicada ao que acontece com a mistura. Neste momento estamos interessados apenas nesta introdução descritiva.

A combinação do processo químico, dinâmico e térmico da mistura gasosa com o mecanismo permite transformar parte da energia química do combustível em energia mecânica no eixo do virabrequim. Esse é o papel do motor.

### 3.3 Mecanismo da Transmissão

A transmissão tem duas funções principais: (1) transferir a potência do eixo do virabrequim para a roda e (2) permitir diferentes relações entre a rotação do motor e a rotação da roda. Esse segundo ponto é importante porque o motor da moto não possui um intervalo muito grande de rotações<sup>9</sup>. Por exemplo, o motor gira entre 1.500 e 9.000 rpm, enquanto a roda gira de 79<sup>10</sup> a 1326 rpm<sup>11</sup>. Em outras palavras, enquanto o motor tem uma variação de seis vezes na sua rotação, a roda precisa passar por uma variação de 17 vezes<sup>12</sup>.

A Figura 14 mostra o subsistema de transmissão, responsável por levar a potência do motor à roda e por variar a relação entre a rotação do motor

---

<sup>7</sup>Por conveniência, o duto de admissão e o de escape são mostrados apenas quando há fluxo

<sup>8</sup>Em um motor real, os eventos de abertura e fechamento das válvulas não coincidem com os quadrantes do virabrequim, pois procura-se aproveitar a inércia dos gases. Veremos isso no próximo capítulo. Aqui, por simplicidade, usaremos o esquema teórico tradicional.

<sup>9</sup>Rotações muito altas aumentam muito a vibração e aumentam muito o intervalo de queima em relação ao movimento do pistão. Rotações muito baixas aumentam muito a perda de calor, impossibilitando o armazenamento de energia para a compressão no próximo ciclo.

<sup>10</sup>Considerando que a embreagem é acionada abaixo de 9 km/h.

<sup>11</sup>Considerando uma roda de 30 cm de raio, com a moto a 150 km/h

<sup>12</sup>Além disso, a potência é alta em apenas um intervalo da faixa total de operação do motor.

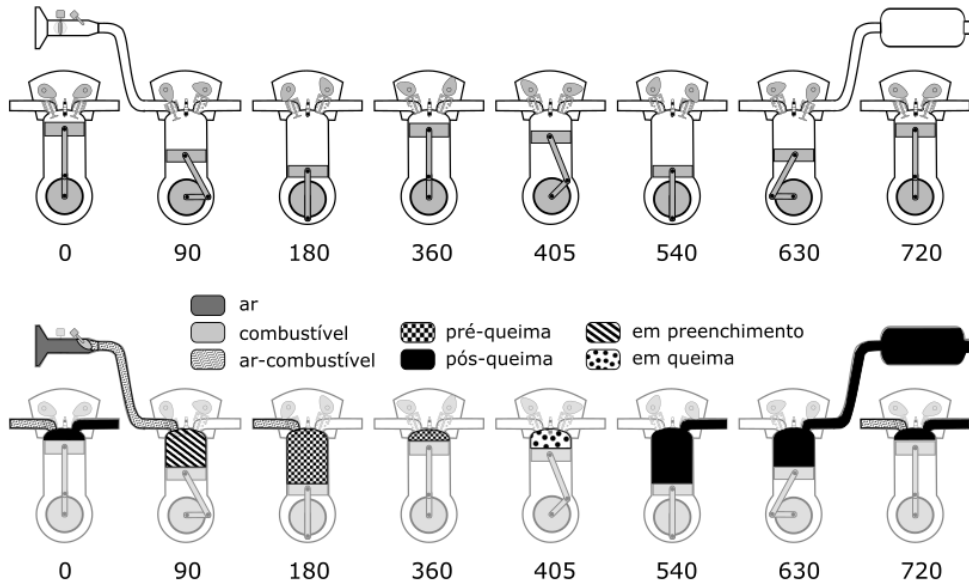


Figura 13: Ciclo das misturas durante o movimento do motor.

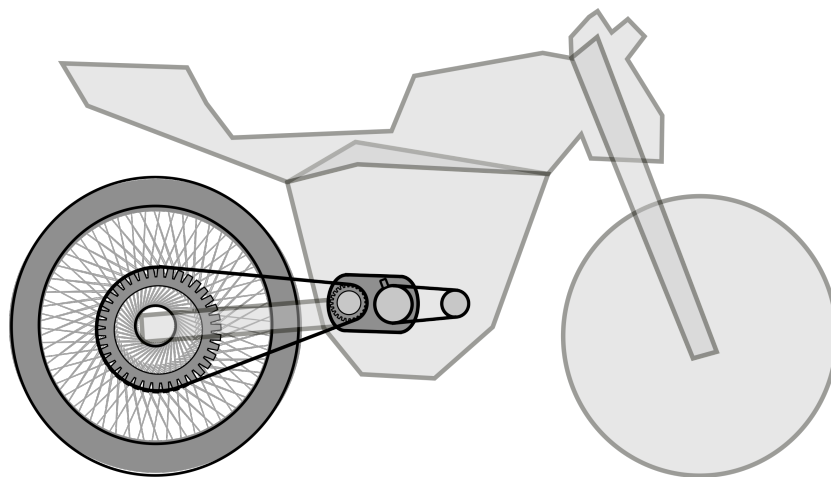


Figura 14: Subsistema da transmissão

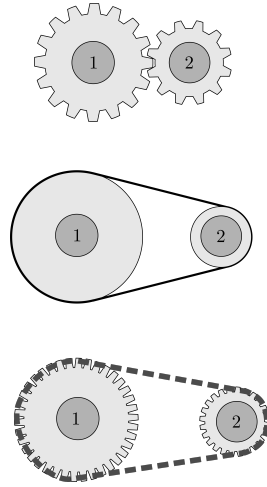


Figura 15: Transmissão pela periferia.

e a rotação da roda. Antes de estudarmos a transmissão da moto em particular, vamos revisar um pouco como podemos transferir potência usando mecanismos. A Figura 15 mostra três formas (*i.e.*, engrenagem, correia e corrente — todas presentes nas motos) de transferir potência de um eixo a outro através do contato periférico. Nesse tipo de mecanismo algumas grandezas são iguais nos dois componentes: potência no eixo ( $P$ ), força ( $F_{\text{per}}$ ) e velocidade periférica ( $V_{\text{per}}$ ); enquanto outras são modificadas: o torque ( $T$ ) e a rotação ( $\omega$ ) variam dependendo da relação entre os raios dos componentes de entrada e de saída. Para a transmissão pela periferia, considerando que o dispositivo de entrada tem raio  $R_{\text{ent}}$  e o de saída  $R_{\text{sai}}$ , temos<sup>13</sup>:

$$P_{\text{ent}} = P_{\text{sai}} \quad (1)$$

$$V_{\text{per,ent}} = V_{\text{per,sai}} \quad (2)$$

$$F_{\text{per,ent}} = F_{\text{per,sai}} \quad (3)$$

$$\omega_{\text{ent}} = \omega_{\text{sai}} \frac{R_{\text{per,sai}}}{R_{\text{per,ent}}} \quad (4)$$

$$T_{\text{ent}} = T_{\text{sai}} \frac{R_{\text{per,ent}}}{R_{\text{per,sai}}} \quad (5)$$

A Figura 16 mostra um outro tipo de conexão, como é o caso da coroa/-roda e das engrenagens na caixa de marchas. A potência nesses casos não é transferida pela periferia, mas pelo eixo. Nesses casos, a potência, rotação e

<sup>13</sup>No início iremos considerar que não há perda de potência na transmissão, mas logo iremos usar uma eficiência ao processo.

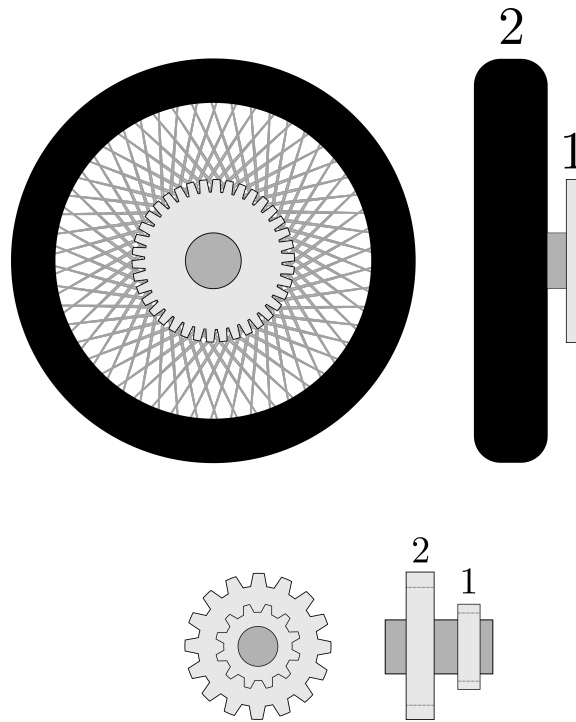


Figura 16: Transmissão pelo centro.

torque são iguais nos dois componentes; enquanto a velocidade e força periféricas diferem dependendo da diferença entre os raios. Para a transferência de potência pelo eixo, temos:

$$P_{\text{ent}} = P_{\text{sai}} \quad (6)$$

$$T_{\text{ent}} = T_{\text{sai}} \quad (7)$$

$$\omega_{\text{ent}} = \omega_{\text{sai}} \quad (8)$$

$$V_{\text{per,ent}} = V_{\text{per,sai}} \frac{R_{\text{per,ent}}}{R_{\text{per,sai}}} \quad (9)$$

$$F_{\text{per,ent}} = F_{\text{per,sai}} \frac{R_{\text{per,sai}}}{R_{\text{per,ent}}} \quad (10)$$

O fato da potência ser sempre constante<sup>14</sup> em qualquer tipo de transmissão é um dos atrativos para trabalharmos com uma formulação baseada na potência, não no torque ou na força (já que esses variam bastante entre o motor e a roda).

<sup>14</sup>A menos das perdas.

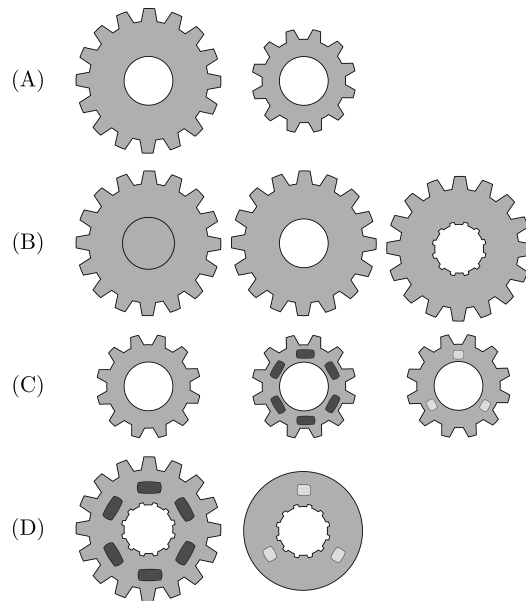


Figura 17: Tipos de engrenagens na caixa de marchas

Agora vamos ver como são alguns componentes da caixa de marchas. A Figura 17 mostra vários tipos de engrenagens. A primeira linha as diferencia pelo número de dentes (quando acopladas, irão transformar o torque e a rotação, mantendo a potência constante). Na segunda linha, a diferença é como estão ligadas ao eixo, *i.e.*, fixas (rodam junto com o eixo), soltas (rodam de forma independente do eixo) ou estriadas (rodam com o eixo, mas podem se movimentar lateralmente). A terceira linha mostra engrenagens que são diferentes nas laterais: lisas, com reentrâncias ou ressaltos. Engrenagens com reentrâncias e com ressaltos se acoplam lateralmente, não pelos dentes como engrenagens convencionais. Finalmente, podemos ter engrenagens com dentes ou "engrenagens" sem dentes (na verdade não são engrenagens, são componentes os quais queremos que se conectem apenas lateralmente, não periféricamente).

A caixa de marchas é um conjunto de componentes como os comentados no último parágrafo. Vamos começar a entender o mecanismo pela Figura 18. Na direita (1) vemos o eixo do virabrequim acoplado à polia de entrada da transmissão primária<sup>15</sup>. A polia de entrada da caixa de marchas (2), por ter o dobro do raio (neste exemplo), roda na metade da rotação.

A embreagem (entre a polia (2) e o eixo (3)) de uma motocicleta é

<sup>15</sup>A transmissão primária pode ser por correia, corrente ou engrenagens. Do ponto de vista cinemático, esses mecanismos são equivalentes. O mais comum é por engrenagem. Usamos polias aqui apenas pela clareza no desenho.

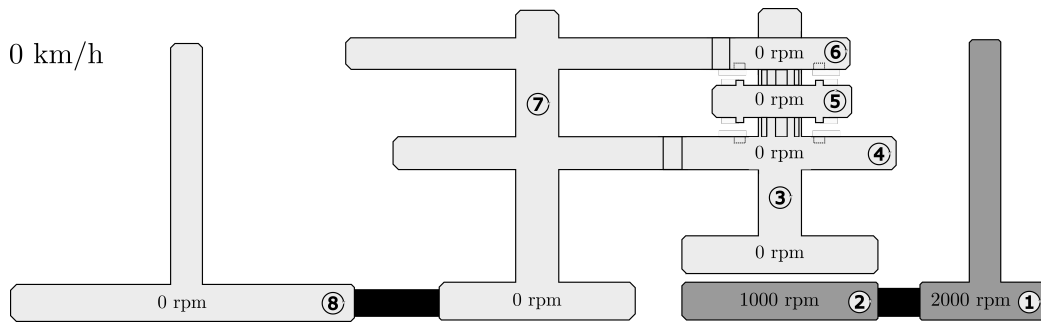


Figura 18: Embreagem acionada

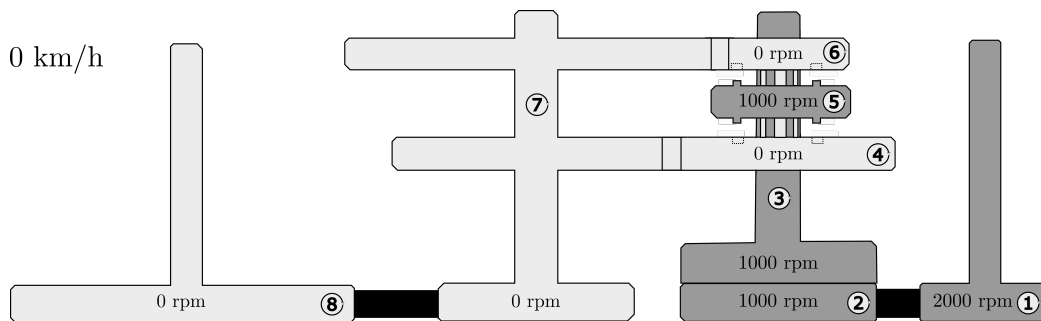


Figura 19: Ponto morto

um conjunto de discos<sup>16</sup> com atrito que, quando pressionados por molas, transmitem o movimento. Quando a mola é liberada (*i.e.*, a embreagem é acionada), eles perdem o atrito entre si, parando de transmitir o movimento. No caso da Figura 18, a embreagem está acionada, então, mesmo que a polia (2) gire, o eixo (3) fica parado<sup>17</sup>.

Na Figura 19 o piloto soltou a embreagem, permitindo que as molas forcem os dois discos, e fazendo com que o eixo de entrada da caixa de marchas (3) rode junto com a polia de saída da transmissão primária (2). A "engrenagem"<sup>18</sup> (5), por ser estriada, roda junto com o eixo de entrada (3). As outras duas engrenagens, (4) e (6), por serem do tipo solto, continuam paradas. Neste caso dizemos que a moto está em ponto morto.

O piloto então aciona a primeira marcha, Figura 20. Do ponto de vista mecânico, o que ele faz é mover a "engrenagem"(5) para cima, encostando

<sup>16</sup>Representamos a embreagem da moto como dois pratos apenas para deixar o desenho mais limpo.

<sup>17</sup>Quando a embreagem está acionada, ou a marcha está no ponto morto (ou neutro), o eixo de saída da caixa de marchas gira de acordo com a rotação da roda. Neste exemplo a roda está parada, por isso o eixo de saída também está parado.

<sup>18</sup>Neste exemplo esta roda não tem dentes

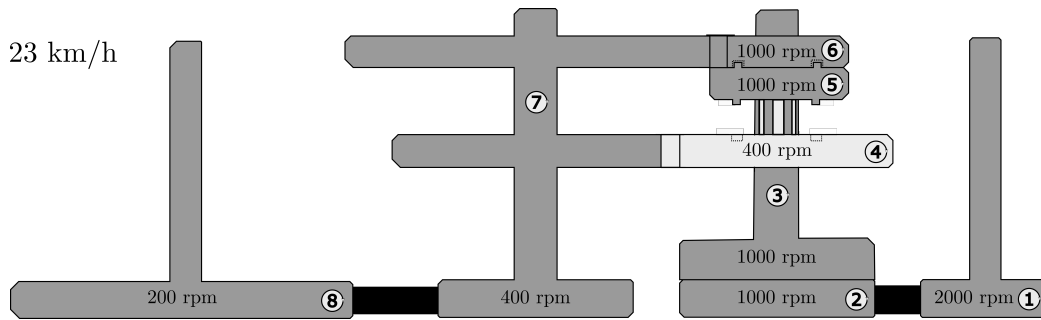


Figura 20: Primeira marcha engatada

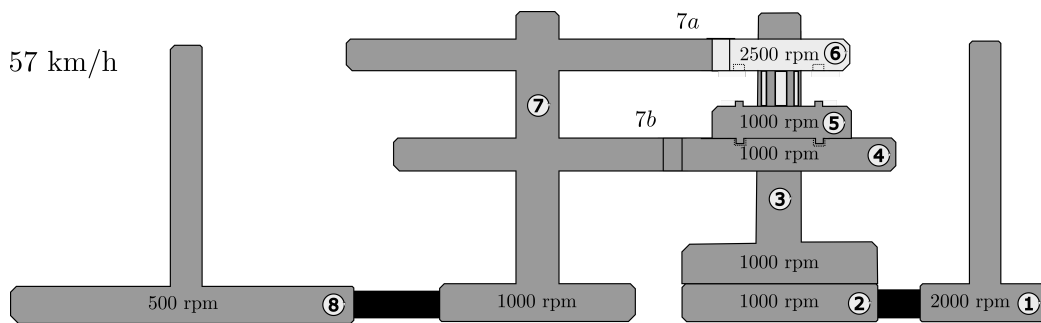


Figura 21: Segunda marcha engatada

lateralmente com a engrenagem (6). Como a primeira tem ressaltos e a segunda reentrâncias, esse contato faz com que a engrenagem (6) gire junto com a engrenagem (5). Isso então movimenta o eixo (7) e a roda (8), que agora está 200 rpm (ou 23 km/h).

A segunda marcha, Figura 21, é acionada quando o piloto faz a engrenagem (5) encostar lateralmente com a engrenagem (4), fazendo-a girar e, consequentemente, fazer a coroa girar a 500 rpm e a roda a 57 km/h.

A diferença entre a primeira e a segunda marchas está na relação entre as engrenagens (6)/(7a) e (4)/(7b). Em uma caixa de marchas comum há cinco ou seis marchas, com movimento de engrenagens nos dois eixos, mas preferimos mostrar essa com apenas duas marchas para enfatizar a ideia.

### 3.4 Mecanismo do Freio

O último subsistema do sistema de potência é o de frenagem, Figura 22. O seu papel é transformar energia cinética da moto em energia térmica, reduzindo a sua velocidade. A Figura 23 mostra a sua operação. O piloto aciona o manete de freio, aumentando a pressão do óleo na mangueira. O óleo dentro do cilindro desloca o pistão contra as sapatas de freio, aumentando

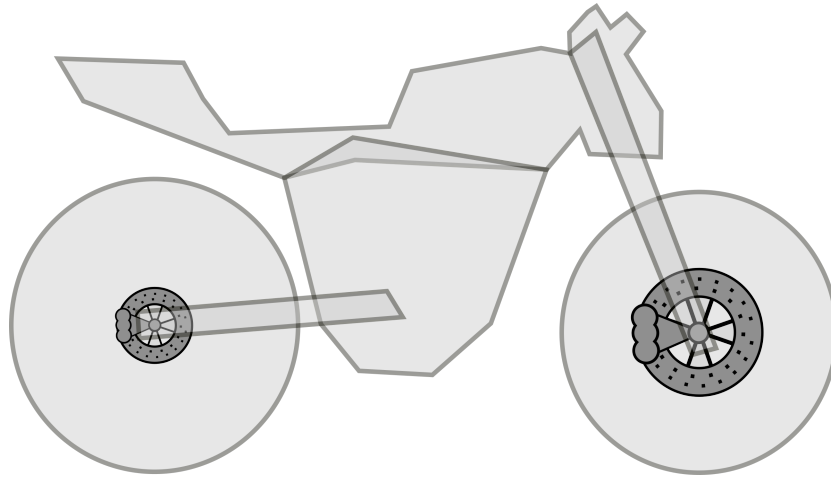


Figura 22: Subsistema de frenagem.

a força de atrito entre essas e o disco de freio, criando uma força contra o movimento da roda (dissipando energia). Vê-se que tanto o torque do freio quanto o da corrente são transmitidos à roda pelo cubo, e só então uma força é criada entre o pneu e o piso (propelindo ou freando a moto). No nosso caso, para facilitar a separação de nossas visões ora de fora e ora de dentro da moto, preferimos imaginar que essas duas forças (propulsão e frenagem) são originadas diretamente no pneu.

## 4 A Potência Através da Transmissão

A Figura 24 mostra, a partir de gráficos, onde estamos agora no nosso estudo. Nas duas últimas aulas<sup>19</sup> estávamos interessados em determinar como a moto se movimentava ( $V(t)$ ) imaginando que conhecíamos a potência na roda  $P_{pro}$  (considerávamos que a máxima potência disponível na roda era uma constante,  $P_{max}$ , independente da rotação do motor). Nesta aula, a partir de agora, vamos calcular a potência na roda a partir da potência no motor,  $P_{motor}$ . Depois, na aula seguinte, iremos calcular a potência do motor propriamente dita. Em outras palavras, nas aulas passadas estávamos olhando para a moto por fora<sup>20</sup>, nesta segunda parte desta aula olharemos para a transmissão<sup>21</sup>, e na aula que vem olharemos para dentro do motor<sup>22</sup>.

<sup>19</sup>Ver apostilas *Física Básica das Motos e Solução Computacional do Movimento das Motos*

<sup>20</sup>Ver Figuras 1c e 24c

<sup>21</sup>Ver Figuras 14 e 24b

<sup>22</sup>Ver Figuras 9 e 24a



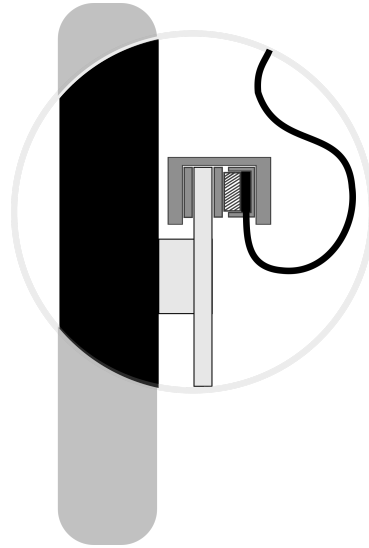


Figura 23: Freio em detalhe.

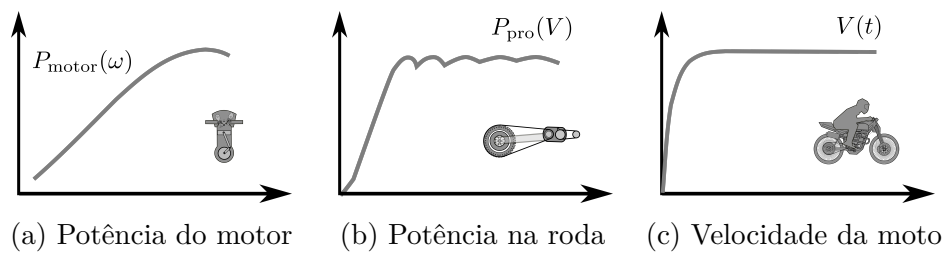


Figura 24: Etapas do cálculo matemático.

## 4.1 Curvas do Motor

Como comentado, na próxima aula iremos ver como calcular a potência do motor. Mas para conseguir realizar o estudo de casos, precisamos de alguma curva genérica. Essa curva servirá depois também para casos práticos, como o ajuste de curvas obtidas em dinamômetro ou dos dados apresentados no manual da moto.

Por falar em dinamômetro, observe a Figura 25. Em geral, o papel do dinamômetro é absorver a energia que vem do motor. Você mede a potência absorvida/dissipada no dinamômetro e então pode determinar a potência gerada pelo motor. Isso pode ser feito de várias formas<sup>23</sup>. Primeiro, a potência do motor pode ser dissipada por um freio (dinamômetro de freio) ou absorvida na forma de energia cinética rotativa em um grande cilindro (dinamômetro inercial). A vantagem do primeiro é que para cada rotação espera-se que o motor entre em regime permanente. Por outro lado, a vantagem do inercial é o seu relativo baixo custo, facilidade de operação, e baixo tempo de ensaio. No entanto, os dinamômetros inerciais apresentam apenas potências transitentes, dificultando a reprodutibilidade dos ensaios e a comparação entre os motores. No caso do dinamômetro de freio, é possível medir na roda ou tirar o motor para medir a potência diretamente em uma bancada. Finalmente, o freio pode ser mecânico, hidráulico ou eletromagnético.

Isso posto, sempre que você olhar um resultado de dinamômetro, pergunte como foi medido (em regime estacionário em um dinamômetro de freio ou em regime transiente em um dinamômetro inercial), a que posição a potência obtida se refere (*i.e.*, potência no pistão, virabrequim ou no eixo da roda), as condições ambientais (*i.e.*, temperatura e pressão do ar, que influenciam na potência do motor), e se possível as características do dinamômetro<sup>24</sup>. Há alguns dinamômetros que podem ser programados para simular as resistências da moto (*e.g.*, arrasto aerodinâmico e de rolagem), e também para criar ciclos de condução (*i.e.*, a moto passa por um ciclo pré-determinado de variação de velocidades). Nesses casos, é importante também saber que parâmetros foram usados no dinamômetro para medir a potência. Na Figura 25, como exemplos, vemos à esquerda um dinamômetro de bancada com freio mecânico, no meio um dinamômetro de chassis com freio mecânico, e à direita um dinamômetro de chassis do tipo inercial.

<sup>23</sup>Estamos fazendo enormes simplificações, já que um dinamômetro envolve todo um sistema de climatização, controle, sensoriamento e registro. Para maiores detalhes ver Martyr e Plint (2007)

<sup>24</sup>A curva do freio nem sempre "envelopa" a curva do motor, resultando em potências irreais; e o momento de inércia do cilindro do dinamômetro inercial influencia a evolução da rotação, influenciando assim o transiente

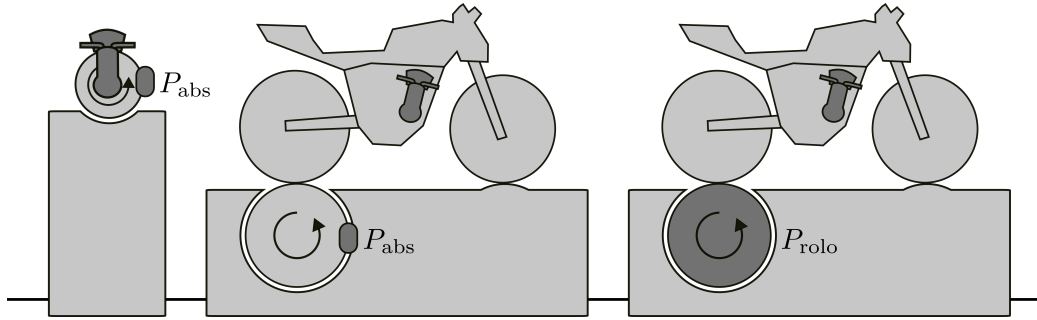


Figura 25: Tipos de dinamômetro: de bancada, de chassis e inercial.

Vamos agora considerar que a potência máxima do motor varia com a rotação, e que curva pode ser escrita como uma cúbica, na forma:

$$P_{\text{motor,max}} = a_1 + a_2\omega_{\text{motor}} + a_3\omega_{\text{motor}}^2 + a_4\omega_{\text{motor}}^3 \quad (11)$$

Devemos lembrar que essa é a potência máxima disponível no motor para cada rotação, sendo que a potência realmente utilizada depende do acionamento do acelerador ( $\alpha$ ) pelo piloto. Então:

$$P_{\text{motor}} = \alpha P_{\text{motor,max}} \quad (12)$$

Para ajudar no ajuste, vamos lembrar algumas relações físicas e matemáticas que agora são aplicadas à Equação 11.

$$P = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + a_4\omega^3 \quad (13)$$

$$\frac{dP}{d\omega} = a_2 + a_32\omega + a_43\omega^2 \quad (14)$$

$$T = \frac{P}{\omega} = a_1\frac{1}{\omega} + a_2 + a_3\omega + a_4\omega^2 \quad (15)$$

$$\frac{dT}{d\omega} = a_1\frac{-1}{\omega^2} + a_3 + a_42\omega \quad (16)$$

Queremos que essa curva passe por certos pontos específicos<sup>25</sup>. Pela Tabela 1, queremos que a potência de pico<sup>26</sup> tenha um valor específico ( $P_{\text{pico}}$ )

<sup>25</sup>Com algumas pequenas modificações, é possível ajustar outros valores. Por exemplo, ajustar pelo valor de  $T_{\text{pico}}$  ao invés da rotação na qual ele ocorre,  $\omega_{T_{\text{pico}}}$ .

<sup>26</sup>Neste trabalho, chamamos de potência máxima a máxima potência disponível em certa velocidade ou rotação. Já a potência de pico é a máxima potência disponível em todas as rotações e velocidades. Usando linguagem matemática,  $P_{\text{motor,pico}}$  é o valor máximo da curva  $P_{\text{motor,max}}$ , que por sua vez é o máximo para cada rotação específica. O mesmo vale para o torque.

Tabela 1: Parâmetros do motor

Par	Valor	Descrição
$P_{\text{pico}}$	$22.080/0,866 = 34,7 \text{ CV}$	pot. de pico, $W$
$P_{\text{int}}$	$0,15P_{\text{pico}} = 3.824$	pot. de dissip. interna, $W$
$P_{\text{corte,min}}$	$3.000$	pot. na rot. min., $W$
$P_{\text{max,roda,const}}$	$22.080 = 30 \text{ CV}$	pot. constante na roda, $W$
$\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}$	$8.000(2\pi/60)$	rot. da potência de pico, $rad/s$
$\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$	$5.500(2\pi/60)$	rot. do torque de pico, $rad/s$
$\omega_{\text{motor,corte,min}}$	$1.500(2\pi/60)$	rot. mínima, $rad/s$
$\omega_{\text{motor,corte,max}}$	$9.000(2\pi/60)$	rot. máxima, $rad/s$
$\eta_{\text{nom}}$	$0,40$	efic. nominal
$\omega_{\text{motor},\eta_{\text{otimo}}}$	$5.500(2\pi/60)$	rot. de efic. máxima, $rad/s$
$\alpha_{\text{otimo}}$	$0,9$	$\alpha$ ótimo
$\eta_{\omega,\omega_{\text{max}}}$	$0,9$	efic. $\eta_{\omega}$ na rot. máx
$\eta_{\alpha,\alpha_{\text{min}}}$	$0,9$	efic. $\eta_{\alpha}$ na rot. min

em uma rotação específica ( $\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}$ ) que o torque de pico ( $T_{\text{pico}}$ ) ocorra em uma rotação específica ( $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$ ), e que a potência na rotação mínima ( $\omega_{\text{motor,corte,min}}$ ) tenha um valor específico ( $P_{\text{corte,min}}$ ). Matematicamente, então, as Equações 13-16 se transformam em:

$$P_{\text{pico}} = a_1 + a_2\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}} + a_3\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^2 + a_4\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^3 \quad (17)$$

$$0 = a_2 + a_32\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}} + a_43\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^2 \quad (18)$$

$$P_{\text{corte,min}} = a_1 + a_2\omega_{\text{motor,corte,min}} + a_3\omega_{\text{motor,corte,min}}^2 + a_4\omega_{\text{motor,corte,min}}^3 \quad (19)$$

$$0 = a_1 \frac{-1}{\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}^2} + a_3 + a_42\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}} \quad (20)$$

Que, escritas matricialmente, ficam:

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}} & \omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^2 & \omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^3 \\ 0 & 1 & 2\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}} & 3\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}^2 \\ 1 & \omega_{\text{motor},\text{corte,min}} & \omega_{\text{motor},\text{corte,min}}^2 & \omega_{\text{motor},\text{corte,min}}^3 \\ -1/\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}^2 & 0 & 1 & 2\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\text{pico}} \\ 0 \\ P_{\text{corte,min}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

A Figura 26 mostra os principais elementos usados para o ajuste. Em geral, os valores de  $P_{\text{pico}}$  (potência nominal do motor),  $\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}$  (a rotação na qual ocorre a potência máxima nominal) e  $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$  (a rotação na qual ocorre o torque máximo) são dadas no manual da motocicleta<sup>27</sup>. A rotação mínima,  $\omega_{\text{motor},\text{corte,min}}$ , é aquela abaixo do qual o motor não tem mais energia suficiente para o próximo ciclo<sup>28</sup>, e "morre". A rotação máxima,  $\omega_{\text{motor},\text{corte,max}}$ , é aquela em que a ignição do motor é desligada pelo sistema de controle para evitar vibrações ou esforços acima dos quais o motor foi projetado para suportar. A potência na rotação mínima,  $P_{\text{corte,min}}$ , em geral não é dada. Nós arbitramos um valor para fazer o ajuste deste exemplo. É sempre bom lembrar que nem todos os motores serão bem ajustados por uma equação cúbica, e que os parâmetros dados variam caso a caso, dependendo do experimento e forma de apresentação do relatório. Que esta seção seja vista apenas como um exemplo de como ajustar a equação do motor.

Para mostrar o uso desse ajuste, na Figura 27 mostramos os resultados para outros casos. Na Curva (1) usamos os valores da Tabela 1 — chamaremos esse motor de **M1** ao longo do texto. Na Curva (2), motor **M2**, mudamos  $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$  de 5.500 para 4.000 rpm<sup>29</sup>. Na Curva (3), motor **M3**, nós diminuimos o valor de  $P_{\text{pico}}$  para 80% do valor da Tabela 1. Novamente, essa curva cúbica é apenas uma aproximação genérica, mas o suficiente para estudarmos mais tarde a influência da potência máxima e do torque máximo no comportamento da moto como um todo.

<sup>27</sup>Adicionalmente, o manual também traz o valor de  $T_{\text{pico}}$ , que nós não usamos neste exemplo mas que pode ser utilizado para verificar o ajuste.

<sup>28</sup>Isso ocorre porque a perda de energia térmica por arrefecimento passa a ser relativamente mais importante quando a rotação diminui, uma vez que há mais tempo para a perda de calor.

<sup>29</sup>A diminuição da rotação na qual ocorre o máximo torque tem como consequência aumentar a potência nas rotações mais baixas, como pode ser visto na Figura 27.

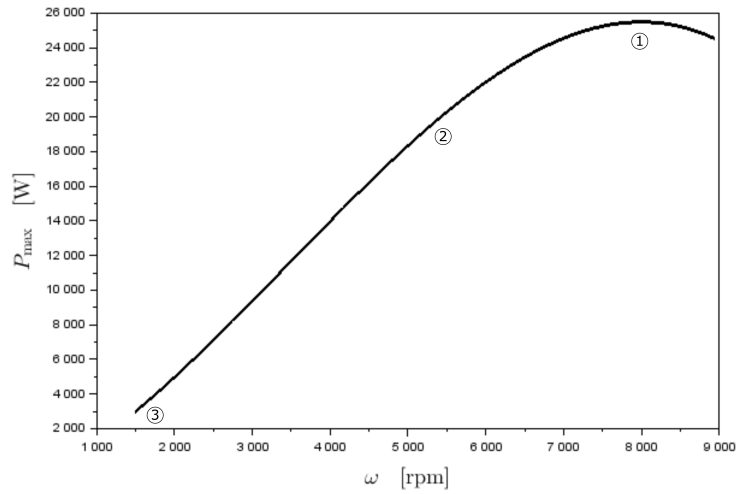


Figura 26: (1)  $P_{\text{pico}}$  e  $\omega_{\text{motor}, P_{\text{pico}}}$ , (2)  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$ , e (3)  $P_{\text{corte}, \min}$  e  $\omega_{\text{motor}, \text{corte}, \min}$

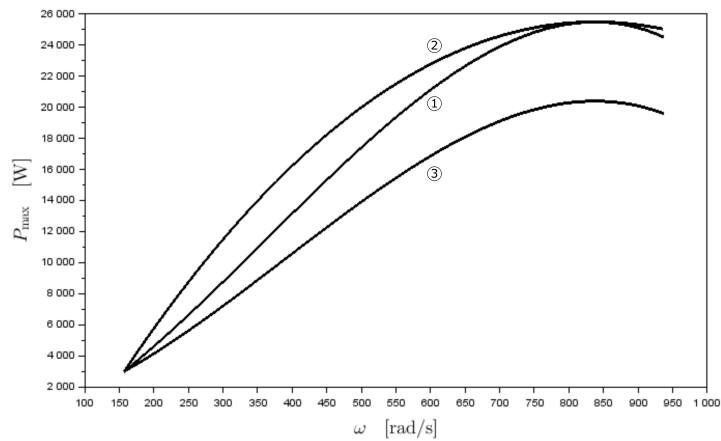


Figura 27:  $P_{\text{motor}, \max}$  para (1) valores da Tabela 1 (motor **M1**), (2)  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 (motor **M2**), (3)  $P_{\text{pico}}$  reduzida para 80% do valor da Tabela 1 (motor **M3**).

Agora vamos para o mapa de eficiência do motor<sup>30</sup>. Consideremos que a eficiência do motor pode ser escrita por:

$$\boxed{\eta_{motor} = \eta_{nom}\eta_{\omega}\eta_{\alpha}} \quad (22)$$

onde:

$$\eta_{\omega} = b_1 + b_2\hat{\omega}_{motor} + b_3\hat{\omega}_{motor}^2 \quad (23)$$

$$\eta_{\alpha} = c_1 + c_2\alpha + c_3\alpha^2 \quad (24)$$

$$\hat{\omega}_{motor} = \frac{\omega_{motor} - \omega_{motor,corte,min}}{\omega_{motor,corte,max} - \omega_{motor,corte,min}} \quad (25)$$

Ou seja, a eficiência do motor,  $\eta_{motor}$  (Equação 22), depende tanto da rotação,  $\omega_{motor}$  (Equação 23 auxiliada pela Equação 25), quanto do acionamento do acelerador,  $\alpha$  (Equação 24). A rotação específica,  $\hat{\omega}_{motor}$ , nada mais é do que a normalização da rotação do motor, que agora varia de 0 a 1.

Voltamos agora à Tabela 1 para olhar alguns parâmetros do mapa de eficiência. O valor máximo da eficiência,  $\eta_{nom}$ , ocorrerá na rotação  $\omega_{motor,\eta_{otimo}}$  e quando o piloto acionar o acelerador na posição  $\alpha_{otimo}$ . Para ajustar as duas quadráticas (Equações 23 e 24), precisamos de mais dois pontos. Assumiremos então que sabemos o valor de  $\eta_{\omega}$  na rotação máxima  $\omega_{motor,corte,max}$  (*i.e.*,  $\eta_{\omega,\omega_{max}}$ ), e que conhecemos o valor de  $\eta_{\alpha}$  na rotação mínima  $\omega_{motor,corte,min}$  (*i.e.*,  $\eta_{\alpha,\alpha_{min}}$ ). A Figura 28 mostra o ajuste feito aos pontos conhecidos de  $\eta_{\omega}$ , e a Figura 29 aos pontos de  $\eta_{\alpha}$ .

Matematicamente, ajustamos as curvas 23 e 24 resolvendo os seguintes sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{\omega}_{motor,otimo} & \hat{\omega}_{motor,otimo}^2 \\ 1 & 1 & 2\hat{\omega}_{motor,otimo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{\omega,\omega_{max}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{otimo} & \alpha_{otimo}^2 \\ 1 & 1 & 2\alpha_{otimo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{\alpha,\alpha_{min}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Como exemplos, a Figura 30 mostra a influência de  $\alpha$  na eficiência do motor, e a Figura 31 mostra a influência de  $\omega_{motor}$ .

<sup>30</sup>Da mesma forma que a curva de potência, o mapa de eficiência também vem de experimentos ou de modelos mais detalhados, como veremos na próxima aula. Que a curva aqui apresentada seja vista como um modelo generalizado ou então uma curva para o ajuste de medições experimentais ou cálculos computacionais.

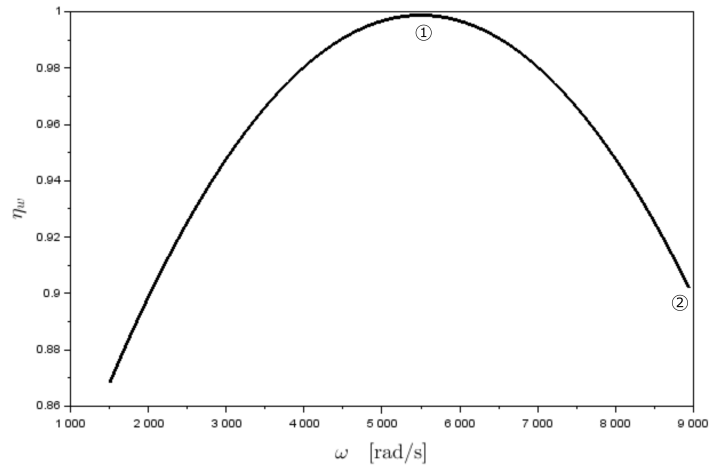


Figura 28: (1)  $\eta_\omega$  máximo em  $\omega_{motor,\eta_{otimo}}$ , (2)  $\eta_\omega = \eta_{\omega,\omega_{max}}$  em  $\omega_{motor,corte,max}$

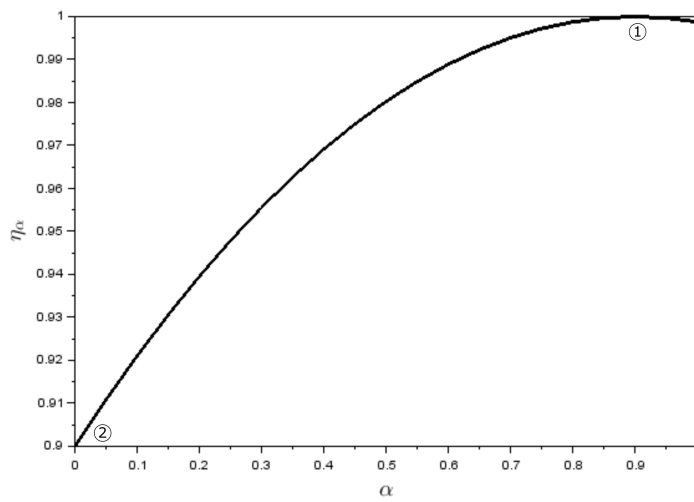


Figura 29: (1)  $\eta_\alpha$  máximo em  $\alpha_{otimo}$ , (2)  $\eta_\alpha = \eta_{\alpha,\alpha_{min}}$  em  $\alpha = 0$



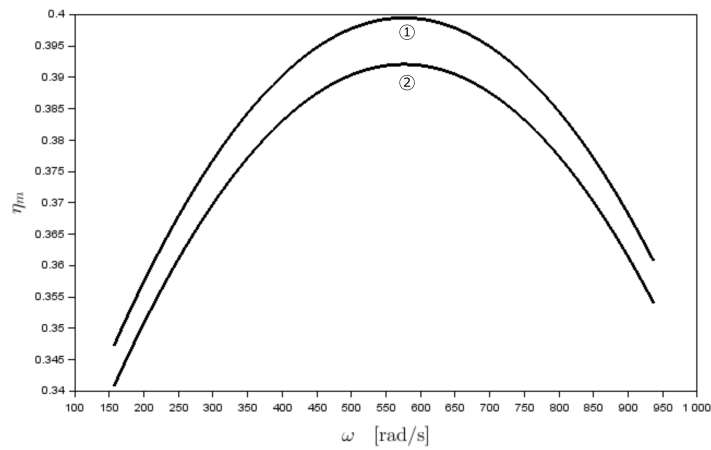


Figura 30: Variação de  $\eta_m$  para os valores da Tabela 1 para (1)  $\alpha = 1$  e (2)  $\alpha = 0,5$

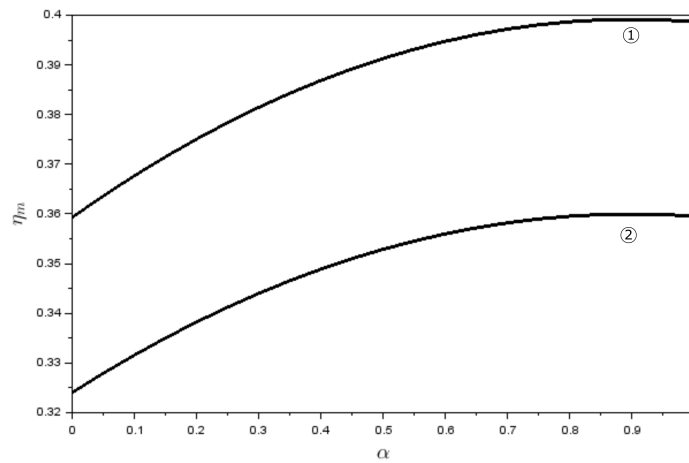


Figura 31: Variação de  $\eta_m$  para os valores da Tabela 1 para (1)  $\omega = 6000$  rpm e (2)  $\omega = 9000$  rpm.

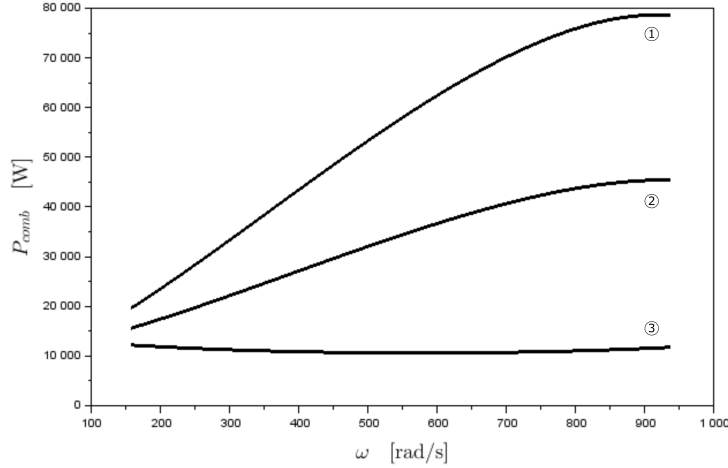


Figura 32:  $P_{comb}$  para (1)  $\alpha=1$ , (2)  $\alpha=0,5$ , e (3)  $\alpha=0$ .

A eficiência do motor representa quanto da energia do combustível ( $P_{comb}$ ) foi convertida para energia mecânica no pistão ( $P_{pist}$ ). Do pistão até o virabrequim (que é a potência que estamos interessados,  $P_{motor}$ ) há ainda perda por atrito e transferência para alimentar tanto a bateria quanto os acessórios (chamaremos todas essas potências de potência interna do motor,  $P_{int}$ ). Portanto:

$$P_{pist} = \eta_m P_{comb} \quad (28)$$

$$P_{motor} = P_{pist} - P_{int} \quad (29)$$

ou

$$P_{comb} = \frac{P_{motor} + P_{int}}{\eta_m} \quad (30)$$

Usando o valor de  $P_{int}$  da Tabela 1, podemos então construir a Figura 32, que mostra a potência de combustível para várias rotações e para vários usos do acelerador ( $\alpha$ ). Interessante notar que há consumo de combustível mesmo no caso em que a potência do motor é nula ( $P_{motor}=0$ , para  $\alpha=0$ ), uma vez que sempre é necessária potência no pistão ( $P_{pist}$ ) para lidar com a potência interna ( $P_{int}$ )<sup>31</sup>.

<sup>31</sup>Em um motor real, essa potência pode vir da energia cinética da moto no caso do "freio motor", mas não iremos considerar esse fenômeno neste primeiro modelo.

## 4.2 Cinemática da Transmissão

Já vimos como podemos representar a potência do motor no virabrequim, agora vamos ver como essa potência é transferida até a roda. Seguindo a Figura 14, vemos que a potência sai do virabrequim, passa pela transmissão primária, embreagem, caixa de marchas, pinhão, coroa e chega na roda. A cada componente desses, segundo as Equações 1-10, há uma modificação no torque e na rotação. Naquelas equações consideramos que não havia perdas (*i.e.*,  $P_{sai}=P_{ent}$ ), mas agora vamos considerar algo mais realista, com uma certa perda. Logo:

$$P_{sai} = \eta_x P_{ent} \quad (31)$$

Mas isso será tocado só na próxima seção. Nesta, estamos interessados na cinemática (nas velocidades e rotações). Primeiro, vamos definir a relação de transmissão do componente, dada pela razão entre a rotação de entrada e de saída.

$$\xi = \frac{\omega_{ent}}{\omega_{sai}} \quad (32)$$

Logo, se uma determinada dupla da transmissão tem  $\xi=2$ , significa que o componente de saída tem a metade da rotação que o componente de entrada. Em geral, esse  $\xi$  pode ser determinado a partir de relações geométricas dos componentes, como a relação entre os dentes de saída e de entrada de um sistema de engrenagens, ou de um sistema coroa/pinhão; ou então como a relação entre os raios das duas polias conectadas por uma correia. No caso de embreagens e CVTs, por exemplo, a relação vai além de questões puramente geométricas.

Voltando à nossa moto, temos a seguinte relação de rotações na transmissão primária:

$$\xi_{prim} = \frac{\omega_{motor}}{\omega_{emb,ent}} \quad (33)$$

na embreagem<sup>32</sup>:

$$\xi_{emb} = \frac{\omega_{emb,ent}}{\omega_{emb,sai}} \quad (34)$$

na caixa de marchas<sup>33</sup>:

$$\xi_{marcha,i} = \frac{\omega_{emb,sai}}{\omega_{pinhao}} \quad (35)$$

<sup>32</sup>A relação da embreagem é variável quando ela é acionada

<sup>33</sup>Lembrando que o piloto pode muda essa relação quando escolhe uma outra marcha

e na relação final:

$$\xi_{\text{final}} = \frac{\omega_{\text{pinhao}}}{\omega_{\text{coroa}}} \quad (36)$$

A roda pode ser vista como um mecanismo que transforma o movimento rotacional da coroa em um movimento translacional da moto, logo:

$$V = R\omega_{\text{coroa}} \quad (37)$$

Combinando todas as relações de transmissão chegamos à relação total:

$$\xi_i = \xi_{\text{prim}}\xi_{\text{emb}}\xi_{\text{marcha},i}\xi_{\text{final}} \quad (38)$$

Podemos então agora relacionar a velocidade da moto com a rotação do motor:

$$V = R\frac{\omega_{\text{motor}}}{\xi_i} \quad (39)$$

ou, a rotação do motor com a velocidade da moto:

$$\omega_{\text{motor}} = \xi_i\frac{V}{R} \quad (40)$$

Alguns comentários sobre as relações.  $\xi_{\text{prim}}$  é uma relação constante, dada pelas engrenagens da relação primária.  $\xi_{\text{marcha},i}$  é na verdade um conjunto de relações constantes, dadas pelas engrenagens da caixa de marchas. O piloto pode escolher qual delas ele quer a cada momento. Vamos ver que às vezes ele escolhe a maior potência (para acelerar mais) ou o maior torque (fortemente relacionado com uma maior eficiência).  $\xi_{\text{final}}$  é uma relação constante, dada pelo número de dentes da coroa e pinhão, mas que pode ser trocada com facilidade.

A relação na embreagem,  $\xi_{\text{emb}}$ , é um pouco diferente. Em geral a relação é unitária, *i.e.*,  $\xi_{\text{emb}}=1$ . Mas quando o piloto aciona a embreagem, ele muda essa relação, o que acontece em duas situações. Uma é durante a mudança de marchas (não vamos considerar esses fenômenos transientes). Outra situação é quando, para uma determinada velocidade, a rotação do motor fica abaixo da sua rotação mínima de operação (abaixo de  $\omega_{\text{motor,corte,min}}$  o motor para, acima de  $\omega_{\text{motor,corte,max}}$  o sistema de controle desliga a ignição). Nesse caso o piloto aciona parcialmente a embreagem, permitindo um deslizamento entre os discos. Podemos então modelar matematicamente a relação da embreagem como:

$$\xi_{\text{emb}} = \max\left(1, \frac{R}{V}\frac{\omega_{\text{motor,corte,min}}}{\xi_{\text{prim}}\xi_{\text{marcha},i}\xi_{\text{final}}}\right) \quad (41)$$

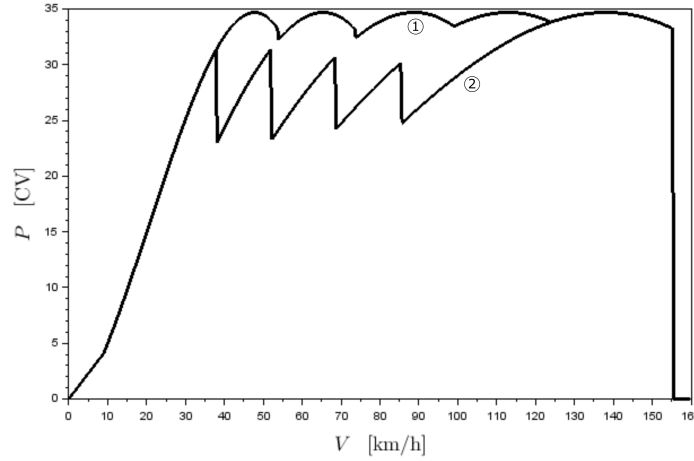


Figura 33:  $P_{motor,max}$  para (1) escolha da marcha com maior potência e (2) escolha da marcha com maior torque.

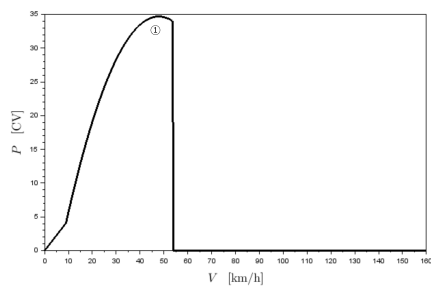
Substituindo na Equação 40, chegamos a<sup>34</sup>:

$$\omega_{motor} = \xi_{prim}\xi_{marcha,i}\xi_{final} \max \left( 1, \frac{R}{V} \frac{\omega_{motor,corte,min}}{\xi_{prim}\xi_{marcha,i}\xi_{final}} \right) \frac{V}{R} \quad (42)$$

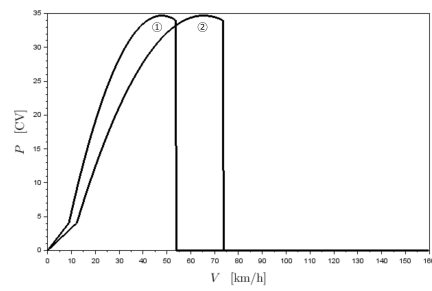
Essa é uma equação importante para a nossa solução computacional, pois vai permitir que para cada velocidade da moto nós possamos determinar a rotação do motor e, conseqüentemente, pela Equação 11, qual é máxima potência disponível naquela situação (potência máxima essa que o piloto modula através do uso do acelerador ou, matematicamente, com a variável  $\alpha$ ).

A Figura 33 mostra a potência máxima disponível no motor,  $P_{motor,max}$ , usando a estratégia (1) de escolher a marcha de maior potência e (2) de escolher a marcha de maior torque. Percebe-se claramente que a estratégia de maior potência resulta em, obviamente e por definição, sempre a maior potência. Portanto, lembrando que  $F = P/V$ , esse será o caso em que a moto terá maior disponibilidade para acelerar. Em geral, a escolha do ponto de maior torque do motor leva a uma situação de maior eficiência do motor.

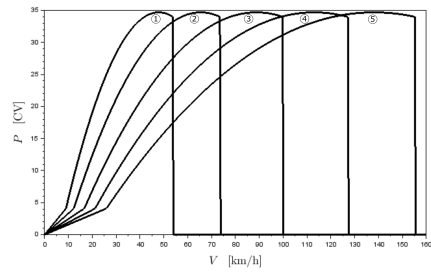
<sup>34</sup>Estamos considerando com essa equação que a embreagem é acionada apenas com a rotação abaixo da mínima e que a roda não desliza no chão, casos em que o modelo matemático precisa ser modificado. Caso a roda deslize, não podemos mais dizer que  $\omega_{coroa} = V/R$



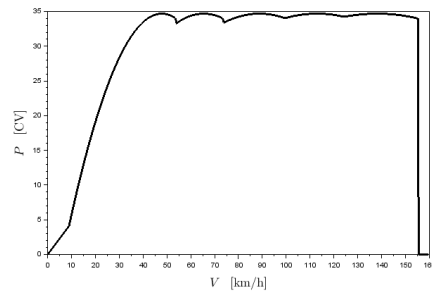
(a) 1a marcha



(b) 1-2a marchas



(c) 1-5a marchas



(d) Marcha com maior potência

Figura 34: Variação de  $P_{\text{pro,max}}$  em função da velocidade para várias marchas.

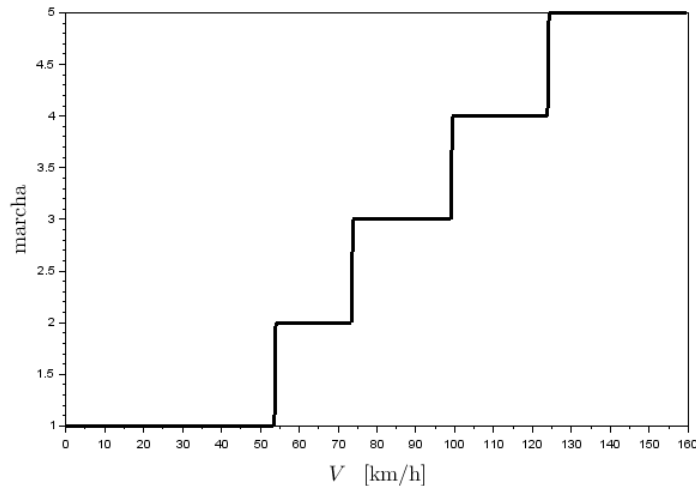


Figura 35: Marcha selecionada para cada velocidade (o piloto escolhe a marcha com maior potência).

A Tabela 2 apresenta os valores que usaremos nos exemplos para as relações de marchas. A Figura 34(a) mostra a potência disponível no motor para a primeira marcha. Há uma boa potência em velocidades mais baixas, mas logo o motor atinge a rotação máxima e tem que ser desligado pelo sistema de controle da moto. Na Figura 34(b) vemos como podemos aumentar a faixa de velocidade de operação com uma segunda marcha. A velocidade alcançada pela segunda marcha é maior, ao mesmo tempo em que acionando a primeira marcha o piloto continua com uma potência mais alta em velocidades mais baixas. Finalmente, a Figura 34(c) mostra como é a disponibilidade de potência no motor para cada velocidade na situação em que o piloto pode escolher entre todas as cinco marchas. A Figura 35 mostra a evolução das marchas para cada velocidade, e a Figura 36 como varia a rotação.

### 4.3 Caminho da Potência na Transmissão

Como comentado na seção acima, em particular na Equação 31, há uma dissipação da potência a cada componente por onde ela passa. Basicamente, vamos multiplicando cada uma por uma eficiência para obter a próxima<sup>35</sup>. Assim, olhando para os componentes da Figura 14, temos:

<sup>35</sup>Uma coisa é simplesmente usarmos as eficiências para calcular as potências, como fazemos aqui. Outra muito diferente é obter essas eficiências, seja experimentalmente seja através da modelagem matemática.

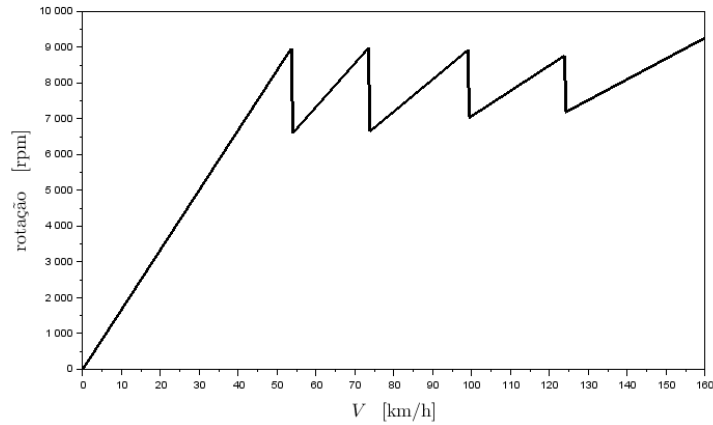


Figura 36: Rotação do motor em função da velocidade.

Tabela 2: Parâmetros da transmissão

Par	Valor	Descrição
$\xi_{\text{prim}}$	2,8	rel. da trans. primária
$\xi_{\text{marcha},i}$	2,6/1,9/1,4/1,1/0,9	rel. da caixa de marchas
$\xi_{\text{final}}$	2,6	rel. da trans. final
$R_{\text{roda}}$	0,3	raio da roda, $m$
$\eta_1$	0,98	efic. da trans. prim
$\eta_2$	0,98	efic. da embreagem
$\eta_3$	0,98	efic. da caixa de marchas
$\eta_4$	0,92	efic. da trans. final



$$P_{\text{emb,e}} = \eta_1 P_{\text{motor}} \quad (43)$$

$$P_{\text{emb,s}} = \eta_2 P_{\text{emb,e}} \quad (44)$$

$$P_{\text{pinhão}} = \eta_3 P_{\text{emb,s}} \quad (45)$$

$$P_{\text{coroa}} = \eta_4 P_{\text{pinhão}} \quad (46)$$

Para simplificar um pouco as equações, às vezes vale a pena juntar todas as eficiências, definindo uma eficiência total:

$$\eta_t = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \quad (47)$$

Tecnicamente, tanto a potência que vem da corrente quanto a potência dissipada pelo freio se subtraem (caso o piloto acione o acelerador e o freio ao mesmo tempo) antes de entrar no cubo da roda. Dali, através dos raios, essa potência resultante cria uma força ( $F = P/V$ ) no ponto de contato do pneu com o chão (freando ou acelerando a moto). Para simplificar, e para poder continuar analisando moto ora de fora e ora de dentro como fizemos nas outras apostilas, vamos imaginar que as duas potências (do motor e do freio) chegam ao pneu separadamente, criando duas forças diferentes:  $F_{\text{pro}}$  e  $F_{\text{frn}}$  (ou duas potências,  $P_{\text{pro}}$  e  $P_{\text{frn}}$ ). Isso está tecnicamente errado e matematicamente correto (os resultados são os mesmos). Por esse modelo simplificado, então, podemos dizer que (lembrando que a potência do freio será subtraída depois, caso o piloto acione o freio):

$$P_{\text{pro}} = P_{\text{coroa}} \quad (48)$$

Combinando as Equações 43-48, chegamos a:

$$P_{\text{pro}} = \eta_t P_{\text{motor}} \quad (49)$$

e

$$\boxed{P_{\text{pro,max}} = \eta_t P_{\text{motor,max}}} \quad (50)$$

Ainda, usando a Equação 30, obtemos:

$$P_{\text{pro}} = \eta_t \eta_m P_{\text{comb}} - \eta_t P_{\text{int}} \quad (51)$$

Ou, lembrando da Equação 12:

$$\boxed{P_{\text{comb}} = \alpha \frac{P_{\text{motor,max}}}{\eta_m} + \frac{P_{\text{int}}}{\eta_m}} \quad (52)$$

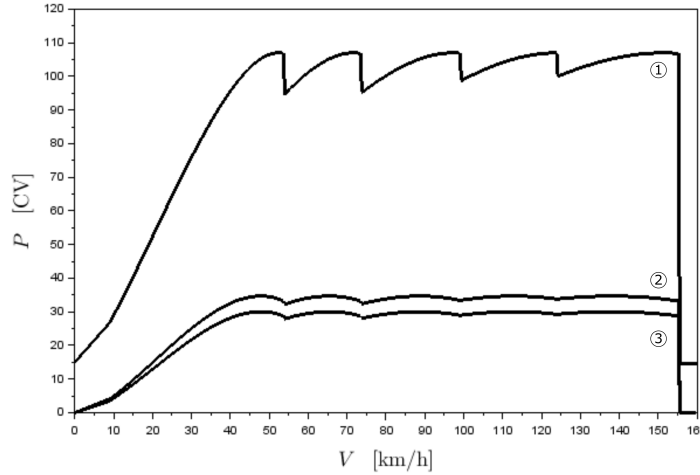


Figura 37: Potências máximas em cada velocidade: (1)  $P_{\text{comb,max}}$ , (2)  $P_{\text{motor,max}}$  e (3)  $P_{\text{pro,max}}$

Como esperado, o consumo de combustível aumenta 1) quanto mais o piloto acelerar ( $\alpha$ ), 2) quanto menor for eficiência do motor ( $\eta_m$ ), e 3) quanto maior for o consumo interno ( $P_{\text{int}}$ ) com o atrito, carregamento da bateria ou uso de acessórios. A Tabela 3 nos traz um resumo do caminho da potência e as transformações das rotações a cada componente do motor e da transmissão.

Na Figura 37 vemos, para cada velocidade, como varia a potência máxima disponível no tanque<sup>36</sup> ( $P_{\text{comb,max}}$ ), na saída do motor ( $P_{\text{motor,max}}$ ) e na roda da motocicleta ( $P_{\text{pro,max}}$ ).

#### 4.4 Equação Geral do Movimento da Moto

Esta seção é uma brevíssima revisão das apostilas passadas, nas quais estávamos interessados em calcular o movimento da moto conhecendo  $P_{\text{pro}}$ . A Figura 38 mostra as principais dimensões da moto, a Figura 39 algumas das principais forças externas, e a Tabela 4 os valores usados nos exemplos.

A equação geral do movimento da moto é dada por:

$$m_c \frac{dV}{dt} = -F_{\text{ine}} = F_{\text{pro}} + F_{\text{frn,t}} + F_{\text{frn,d}} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} \quad (53)$$

Onde:

---

<sup>36</sup>Na verdade não é o tanque que restringe a potência, mas sim o sistema de controle da injeção de combustível, que dosa o combustível de acordo com a vazão de ar aspirada pelo motor.

Tabela 3: Caminho da potência do tanque até a roda traseira: entradas e saídas

	Descrição	$P_{ent}$	$P_{sai}$	$\omega_{ent}$	$\omega_{sai}$
	Tanque	$P_{comb}$	$P_{comb}$	—	—
	Cilindro	$P_{comb}$	$P_{pist}$	—	—
	Biela-manivela	$P_{pist}$	$P_{motor}$	—	$\omega_{motor}$
	Relação primária	$P_{motor}$	$P_{emb,ent}$	$\omega_{motor}$	$\omega_{emb,ent}$
	Embreagem	$P_{emb,ent}$	$P_{emb,sai}$	$\omega_{emb,ent}$	$\omega_{emb,sai}$
	Caixa de marchas	$P_{emb,sai}$	$P_{pinhão}$	$\omega_{emb,sai}$	$\omega_{pinhão}$
	Relação final	$P_{pinhão}$	$P_{coroa}$	$\omega_{pinhão}$	$\omega_{coroa}$
	Roda	$P_{coroa}$	$P_{roda}$	$\omega_{coroa}$	$\omega_{roda}$
	Motocicleta	$P_{roda}$	—	—	—

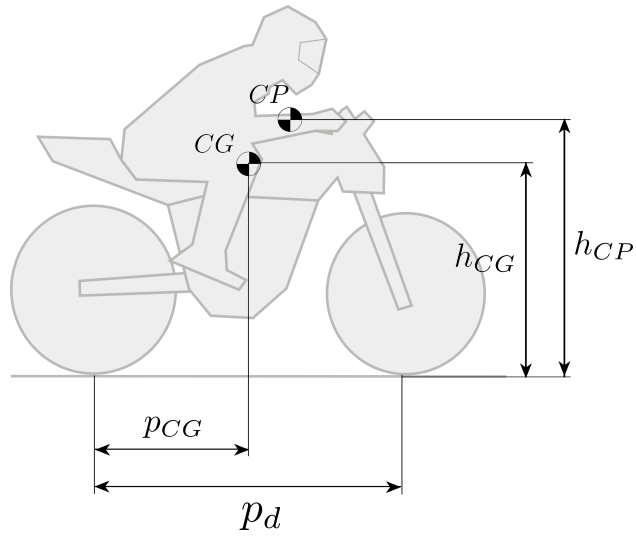


Figura 38: Dimensões principais da moto.

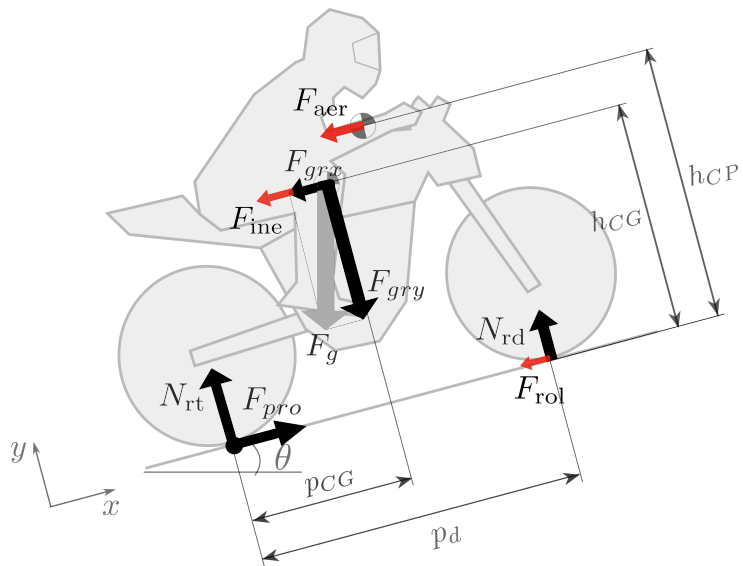


Figura 39: Moto em movimento, aclave de 15°.

Tabela 4: Parâmetros da moto e da pista

<b>Par</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$h_{CG}$	0,72	altura do centro de gravidade, $m$
$h_{CP}$	0,95	altura do centro de pressão, $m$
$p_d$	1,40	distância entre eixos, $m$
$p_{CG}$	0,67	distância do CG para o eixo traseiro, $m$
$m_m$	170	massa da moto, $kg$
$m_p$	80	massa do piloto, $kg$
$\mu$	0,8	coeficiente de atrito entre o pneu e o piso
$k_A$	0,35	fator aerodinâmico, $kg/m$
$C_R$	0,02	coeficiente de rolagem
$PC_{vol}$	$31,025 \times 10^9$	poder calorífico volumétrico, $J/m^3$
$g$	9,81	aceleração da gravidades, $m/s^2$
$\mu$	0,8	coeficiente de atrito
$W$	-0	velocidade do vento $m/s$
$\theta$	0	ângulo de aclave da pista $rad$

$$m_c = m_m + m_p \quad (54)$$

$$F_{\text{ine}} = -m_c a \quad (55)$$

$$N_{rt} = -N_{rd} - F_{\text{gry}} \quad (56)$$

$$N_{rd} = \frac{F_{\text{ine}} h_{\text{CG}} + F_{\text{aer}} h_{\text{CP}} + F_{\text{grx}} h_{\text{CG}} - F_{\text{gry}} p_{\text{CG}}}{p_d} \quad (57)$$

$$F_{f_{rn,d}} = -\beta_d \mu N_{rd} \quad (58)$$

$$F_{f_{rn,t}} = -\beta_t \mu N_{rt} \quad (59)$$

Como agora estamos considerando as várias transformações de potência no caminho do tanque até a roda, vamos mudar um pouco a notação para deixar mais claro sobre qual lugar da moto estamos nos referindo. Em relação a Magnani (2020b), mudamos de  $P_{\text{max}}$  para  $P_{\text{pro,max}}$ , e de  $P$  para  $P_{\text{pro}}$ .

Continuando com a revisão, agora usando as variáveis com seus nomes mais específicos, substituindo as Equações 48 e 50 na Equação 12, temos:

$$\boxed{P_{\text{pro}} = \alpha P_{\text{pro,max}}} \quad (60)$$

Também,

$$F_{\text{pro}} = \frac{P_{\text{pro}}}{V} = \frac{\alpha P_{\text{pro,max}}}{V} \quad (61)$$

Assim, a Equação 29 da apostila *Solução Computacional do Movimento das Motos* ou a Equação 24 da apostila *Física Básica das Motos* se transformam em:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{\alpha P_{\text{pro,max}}}{V} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} + \beta_t \mu F_{\text{gry}} + (\beta_d - \beta_t) \mu \left( -\frac{F_{\text{aer}} h_{\text{CP}}}{p_d} - \frac{F_{\text{grx}} h_{\text{CG}}}{p_d} + \frac{F_{\text{gry}} p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \right] \Bigg/ \left\{ m_c \left[ 1 - (\beta_d - \beta_t) \mu \frac{h_{\text{CG}}}{p_d} \right] \right\}} \quad (62)$$

Onde as outras forças podem ser calculadas por:

$$F_{\text{grx}} = -m_c g \sin \theta \quad (63)$$

$$F_{\text{gry}} = -m_c g \cos \theta \quad (64)$$

$$F_{\text{aer}} = -k_A (V - W)^2 \quad (65)$$

$$F_{\text{rol}} = -C_R m_c g \cos \theta \quad (66)$$

A Equação 62 é bastante detalhada, o que é fundamental para a hora dos cálculos computacionais. Mas podemos escrevê-la de outra forma para facilitar as nossas conversas no momento da análise do resultados. Então, podemos dizer que:

$$m_c a = F_{\text{pro}} + F_{\text{frn,t}} + F_{\text{frn,d}} + F_{\text{res}} \quad (67)$$

Onde:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} \quad (68)$$

Ou, ainda, que:

$$P_{\text{res}} = V F_{\text{res}} = V (F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}}) = P_{\text{aer}} + P_{\text{rol}} + P_{\text{grx}} \quad (69)$$

## 4.5 Consumo de Energia e Eficiência

Resolvendo a Equação 62, saberemos então a velocidade,  $V$ , e o uso do acelerador,  $\alpha$ , a cada momento do movimento, o que nos permitirá calcular todas as grandezas de interesse, como, por exemplo, a potência do combustível ( $P_{\text{comb}}$ , pela Equação 52) ou a potência do motor ( $P_{\text{pro}}$ , pela Equação 60). De posse dessas forças e potências, podemos agora calcular a energia consumida por cada um dos elementos da moto durante toda a sua trajetória.

A energia do combustível consumido:

$$E_{\text{comb}} = \int P_{\text{comb}} dt \quad (70)$$

A energia dissipada ou consumida pelo mecanismo interno:

$$E_{\text{int}} = \int P_{\text{int}} dt \quad (71)$$

A energia mecânica gerada pelo motor:

$$E_{\text{motor}} = \int P_{\text{motor}} dt \quad (72)$$

A energia mecânica entregue na roda:

$$E_{\text{pro}} = \int P_{\text{pro}} dt = \int V F_{\text{pro}} dt \quad (73)$$

As energias dissipadas nos dois freios:

$$E_{\text{frn,t}} = - \int P_{\text{frn,t}} dt = - \int V F_{\text{frn,t}} dt \quad (74)$$

$$E_{\text{frn,d}} = - \int P_{\text{frn,d}} dt = - \int V F_{\text{frn,d}} dt \quad (75)$$

$$E_{\text{freios}} = E_{\text{frn,t}} + E_{\text{frn,d}} \quad (76)$$

A energia emitida pelo escapamento e a energia dissipada pela transmissão:

$$E_{\text{esc}} = E_{\text{comb}} - E_{\text{motor}} - E_{\text{int}} \quad (77)$$

$$E_{\text{transm}} = E_{\text{motor}} - E_{\text{pro}} \quad (78)$$

A energia acumulada na forma de energia cinética e na forma de energia potencial gravitacional:

$$E_{\text{ine}} = - \int P_{\text{ine}} dt = - \int V F_{\text{ine}} dt \quad (79)$$

$$E_{\text{grx}} = - \int P_{\text{grx}} dt = - \int V F_{\text{grx}} dt \quad (80)$$

A energia dissipada pelo arrasto aerodinâmico e pela resistência à rolagem:

$$E_{\text{aer}} = - \int P_{\text{aer}} dt = - \int V F_{\text{aer}} dt \quad (81)$$

$$E_{\text{rol}} = - \int P_{\text{rol}} dt = - \int V F_{\text{rol}} dt \quad (82)$$

De posse dessas energias, podemos agora calcular o percentual de cada uma dessas energias em relação à energia do combustível:

$$\tau_{\text{esc}} = E_{\text{esc}}/E_{\text{comb}} \quad (83)$$

$$\tau_{\text{int}} = E_{\text{int}}/E_{\text{comb}} \quad (84)$$

$$\tau_{\text{transm}} = E_{\text{transm}}/E_{\text{comb}} \quad (85)$$

$$\tau_{\text{freios}} = E_{\text{freios}}/E_{\text{comb}} \quad (86)$$

$$\tau_{\text{aer}} = E_{\text{aer}}/E_{\text{comb}} \quad (87)$$

$$\tau_{\text{rol}} = E_{\text{rol}}/E_{\text{comb}} \quad (88)$$

$$\tau_{\text{grx}} = E_{\text{grx}}/E_{\text{comb}} \quad (89)$$

$$\tau_{\text{ine}} = E_{\text{ine}}/E_{\text{comb}} \quad (90)$$



Obviamente, a soma de todos os percentuais tem que ser 1:

$$\tau_{\text{esc}} + \tau_{\text{int}} + \tau_{\text{transm.}} + \tau_{\text{freios}} + \tau_{\text{aer}} + \tau_{\text{rol}} + \tau_{\text{grx}} + \tau_{\text{ine}} = 1 \quad (91)$$

Finalmente, podemos calcular a distância percorrida pela moto:

$$L = \int dx \quad (92)$$

A altura do ponto final em relação ao ponto de partida:

$$h = \int \sin \theta dx \quad (93)$$

O tempo necessário para o trajeto:

$$\Delta t = \int dt \quad (94)$$

O volume de combustível consumido:

$$\mathbb{V} = \frac{E_{\text{comb}}}{\text{PC}_{\text{vol}}} \quad (95)$$

Onde  $\text{PC}_{\text{vol}}$  é poder calorífico do combustível na base volumétrica. Ou, em outras palavras, a energia térmica liberada durante a queima de 1 litro de combustível.

A eficiência de propulsão (*i.e.*, a energia mecânica entregue na roda em relação à energia do combustível):

$$\boxed{\eta_{\text{pro}} = \frac{E_{\text{pro}}}{E_{\text{comb}}}} \quad (96)$$

E a eficiência do transporte, *i.e.*, o percentual da energia do combustível que foi utilizado para aumentar a energia cinética e potencial do piloto:

$$\boxed{\eta_{\text{transp}} = (\tau_{\text{grx}} + \tau_{\text{ine}}) \frac{m_p}{m_c}} \quad (97)$$

Outra métrica interessante é a economia da moto, *i.e.*, a distância que ela percorre por volume de combustível:

$$\boxed{\epsilon = \frac{L}{\mathbb{V}}} \quad (98)$$

## 4.6 Solução Computacional

Nesta seção faremos uma rápida revisão da apostila *Solução Computacional do Movimento da Moto*, enfatizando, depois, as modificações no código para incluir o que foi discutido nesta apostila.

### Forma Geral

A solução computacional do movimento da moto foi implementada no *Scilab*<sup>37</sup>, que demanda que o problema seja escrito de uma forma específica. Primeiro, o sistema de equações diferenciais é montado assim:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \\ \frac{dV}{dt} = D(V, x, t) \end{cases} \quad (99)$$

No nosso caso, a *Função D* é obtida pelo lado direito da Equação 62:

$$D = \left[ \frac{\alpha P_{\text{pro,max}}}{V} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} + \beta_t \mu F_{\text{gry}} + (\beta_d - \beta_t) \mu \left( -\frac{F_{\text{aer}} h_{\text{CP}}}{p_d} - \frac{F_{\text{grx}} h_{\text{CG}}}{p_d} + \frac{F_{\text{gry}} p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \right] / \left\{ m_c \left[ 1 - (\beta_d - \beta_t) \mu \frac{h_{\text{CG}}}{p_d} \right] \right\} \quad (100)$$

As variáveis de interesse,  $x$  e  $V$ , são organizadas em um vetor  $Q$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Criamos uma *Função S*, que basicamente retorna o lado direito das equações diferenciais 99:

$$S(t_i, Q_i) = \begin{bmatrix} V_i \\ D(V_i, x_i, t_i) \end{bmatrix} \quad (102)$$

O vetor de tempos nos quais a equação diferencial será avaliada (para fazer gráficos, etc) é criado como:

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_f] \quad (103)$$

<sup>37</sup>O *Scilab* pode ser baixado em <http://www.scilab.org/download>

Tabela 5: Funções externas.

Função	Entrada	Saída	Linhas
F1: <i>eval_parmot()</i>	Tabela 1	$a_i, b_i$ e $c_i$	2-33
F2: <i>eval_Pmotmax()</i>	$\omega_{motor}$	$P_{motor,max}$	35-45
F3: <i>eval_efic()</i>	$\omega_{motor}, \alpha$	$\eta_m$	47-51
F4: <i>eval_Pcomb()</i>	$\omega_{motor}, \alpha$	$P_{comb,max}$	53-63
F5: <i>eval_Pmaxroda()</i>	$V$	$P_{pro,max}$	66-86

Finalmente, usamos a função *ode()* do *Scilab*, que se encarrega de encontrar os valores de  $V = f(t)$  e  $x = f(t)$ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{ode}(Q_0, t_0, \mathbf{t}, S) \quad (104)$$

### Modificações no Modelo

A solução computacional desta apostila foi dividida em três códigos de *Scilab*: *getpar-s1.sci* (função que retorna os parâmetros físicos da moto, motor e transmissão, conforme Tabelas 1, 2 e 4), *func-s1.sci* (funções da Tabela 5), e *moto-s1.sce* (programa principal, conforme Tabela 6)<sup>38</sup>.

As cinco funções da listagem *func-s1.sci* são apresentadas na Tabela 5. A Função *eval\_parmot()* é responsável por calcular os coeficientes  $a_i, b_i$  e  $c_i$ , que ajustam as Equações 21, 26 e 28 aos valores da Tabela 1, conforme mostrado na Seção 4.1. Com esses coeficientes calculados uma única vez, podemos, a qualquer momento que for necessário, calcular as funções *eval\_Pmotmax()* ( $P_{motor,max} = f(\omega_{motor})$ , Equação 11), *eval\_efic()* ( $\eta_m = f(\omega_{motor}, \alpha)$ , Equação 22, auxiliada pelas Equações 23 e 24) e *eval\_Pcomb()* ( $P_{comb,max} = f(\omega_{motor}, \alpha)$ , Equação 52).

A Função *eval\_Pmaxroda()* ( $P_{pro,max} = f(V)$ ) é um pouco diferente, pois nessa função é necessária uma estratégia interna de escolha de marchas. No caso da implementação desta apostila, o piloto sempre escolhe a marcha com

<sup>38</sup>São disponibilizados ainda mais três listagens em *Scilab*: *trans-s1.sce* (parte inicial para compreender *moto-s1.sce*, que calcula apenas as curvas do motor em função da rotação), *trans-s2.sce* (parte intermediária de *moto-s1.sce*, que calcula forças e potências em função da velocidade), e *moto-s2.sce* (que calcula o movimento da moto para uma distância especificada, ao contrário de *moto-s1.sce* que calcula para um tempo especificado). Essas três listagens foram usadas para fazer alguns dos gráficos desta apostila, mas não são necessárias para compreender os cálculos principais.

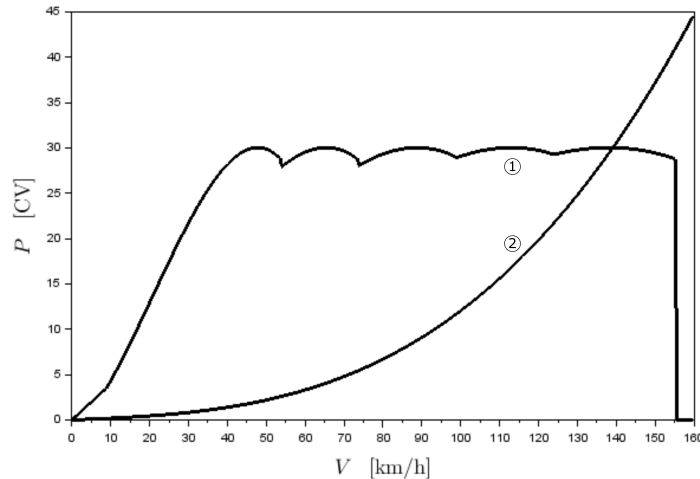


Figura 40: Potência em função da velocidade: (1)  $P_{\text{pro,max}}$  (2)  $P_{\text{res}}$ .

a maior potência para aquela rotação<sup>39</sup>. Basicamente, para uma determinada velocidade,  $V$ , da moto, a função avalia qual seria a rotação do motor para todas as marchas usando a Equação 42. Com essas rotações, a função chama a função *eval\_Pmotmax()* para avaliar a máxima potência disponível naquela condição. Finalmente, o algoritmo escolhe a marcha com a maior potência, usando a Equação 50 para calcular a potência máxima disponível na roda.

A Figura 40 mostra  $P_{\text{pro,max}}$  (Equação 50, auxiliada pelas Equações 42 e Equação 11) e  $P_{\text{res}}$  (Equação 69), deixando evidente o potencial que há para o piloto acelerar a moto ( $a = P/(mV)$ ).

A Tabela 6 mostra o algoritmo principal para o cálculo do movimento da moto, aprimorado a partir do algoritmo *EDOsist-s2.sce* apresentado na apostila *Solução Computacional do Movimento das Motos* (Apêndice B, Tabela 3 e Seção 5.3). Há quatro modificações principais:

1. Potência máxima do motor variável. Na *Função S* da listagem anterior, usávamos uma potência constante disponível na roda. Agora usamos *eval\_Pmaxroda()*, que calcula a potência máxima disponível variando com a velocidade. Essa mudança tem impacto na dinâmica da motocicleta, como veremos mais adiante.
2. Cálculo de um maior número de grandezas auxiliares. Ainda na *Função S* fizemos uma série de cálculos adicionais, permitindo a quantificação

<sup>39</sup>Outra alternativa seria implementar uma estratégia que escolhesse a melhor eficiência do motor para cada situação.

Tabela 6: Solução computacional do movimento da moto.

Bloco	Linhas	Descrição
B1: Comandos ao sistema	2-4	limpa o console, variáveis locais e globais
B2: <i>Função S</i>	—	—
	08-09	B2.1: extração das variáveis
	12-14	B2.2: modelo do piloto
	17	B1.3: modelo do motor, $P_{\text{pro,max}}$
	21-23	B2.4: modelo da pista
	26-30	B2.5: cálculo das forças
	33	B2.6: cálculo de $D$ (aceleração)
	36-37	B2.7: retorno do lado direito das EDOs
	40-49	B2.8: retorno de outras grandezas
B3: Entrada	—	—
	57-62	B3.1: dados físicos da simulação
	65	B3.2: carrega as funções da Tabela 5
	68-71	B3.3: declara algumas estruturas globais
	74	B3.4: carrega as Tabelas 1, 2 e 4
	77-78	B3.5: cria vetores
B4: <i>Solver</i>	81	chama a função <i>ode()</i> do <i>Scilab</i>
B5: Saída	—	—
	84-117	B5.1: extrai resultados, chama a <i>Função S</i>
	120-150	B5.2: calcula valores integrais
	153-163	B5.3: calcula percentuais
	166-168	B5.4: saída de valores numéricos
	171-207	B5.5: gráficos

das normais, eficiência do motor, potência do combustível, *etc.*. Essas novas grandezas calculadas não são necessárias para o movimento da moto, mas são interessantes para quantificarmos o consumo e para analisarmos de forma mais detalhada o movimento.

3. Saída mais rica de resultados. A *Função S* agora retorna duas variáveis:  $Q$  e  $E$ . O vetor  $Q$ , como mostrado na Equação 101, nada mais é que o agrupamento das variáveis  $x$  e  $V$ , e a estrutura  $E$  contém todas as forças e energias adicionais. Quando a *Função S* é chamada pela função *ode()* do *Scilab*, esse é o único interesse (a estrutura  $E$  retornada sendo ignorada). Mas, depois que a solução,  $V(t)$  e  $x(t)$ , é encontrada pela função *ode()*, nós chamamos novamente a *Função S*, mas agora interessados também na estrutura  $E$ , que nos permitirá fazer a contabilidade do movimento segundo as Equações 70—98 da Seção 4.5.
4. Organização do código. Chamada das funções descritas na Tabela 5 e carregamento dos parâmetros das Tabelas 1, 2 e 4.

Em outras palavras, enquanto a primeira modificação tem uma influência no cálculo do movimento, as outras três tem mais a ver com a organização do algoritmo e uma maior riqueza na saída de dados para ajudar em nossas análises<sup>40</sup>

A Figura 41 mostra finalmente a solução do movimento da motocicleta considerando agora a curva variável do motor. Vemos ali como a velocidade evolui para o Caso Base, i.e., considerando  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4. Agora que já fizemos toda a modelagem matemática e vimos como resolver o problema computacionalmente, podemos realizar um estudo de casos.

## 4.7 Estudo de Casos

Primeiro, vamos aproveitar que agora temos uma maior riqueza de resultados para analisar alguns fenômenos estudados nas apostilas passadas. Depois, iremos analisar a influência do motor no movimento da motocicleta.

### Apostila *Física Básica das Motos*

A Figura 42 mostra as forças em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $F_{\text{pro}}$ , (2)  $F_{\text{ine}}$ , (3)  $F_{\text{rol}}$  e (4)  $F_{\text{aer}}$ . Os valores finais, para velocidade constante, coincidem com a Tabela 6 da apostila *Física Básica das*

---

<sup>40</sup>Essas modificações já poderiam ter sido feitas na apostila passada, mas preferimos deixar aquele algoritmo o mais simples possível para apresentar a essência do cálculo computacional do movimento.

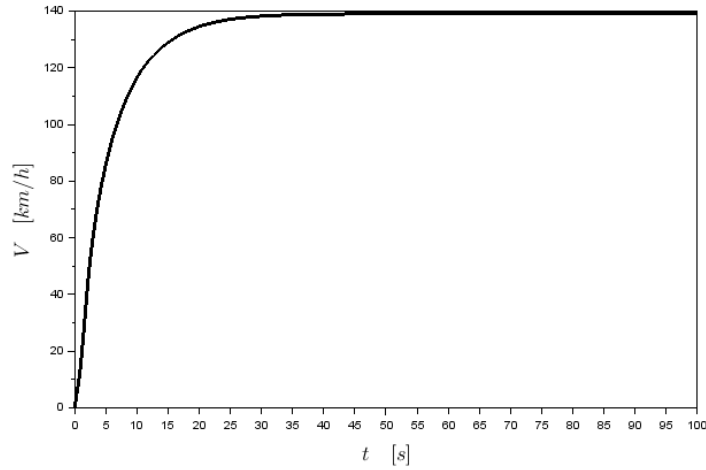


Figura 41: Velocidade em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4.

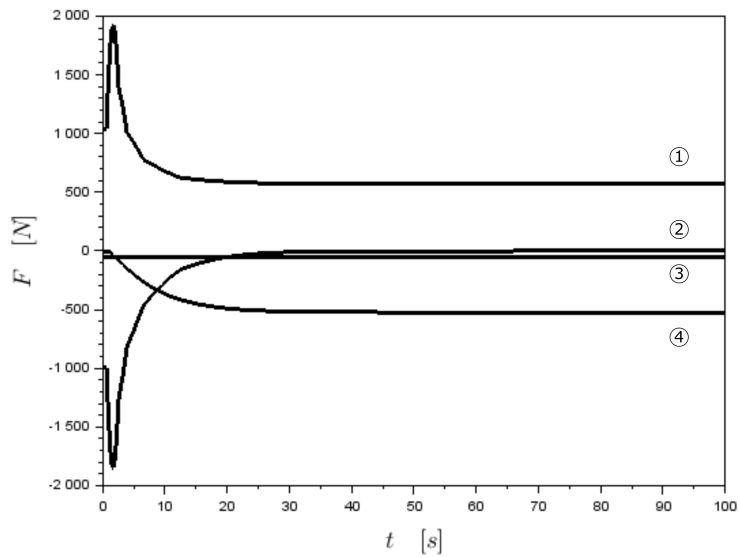


Figura 42: Forças em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $F_{\text{pro}}$ , (2)  $F_{\text{ine}}$ , (3)  $F_{\text{rol}}$  e (4)  $F_{\text{aer}}$ . Os valores finais para velocidade constante coincidem com a Tabela 6 da apostila *Física Básica das Motos*.

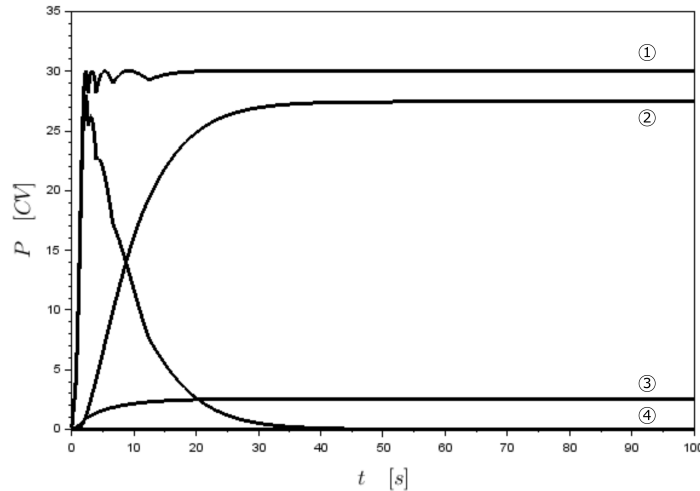


Figura 43: Potências em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $P_{\text{pro}}$ , (2)  $P_{\text{aer}}$ , (3)  $P_{\text{rol}}$  e (4)  $P_{\text{ine}}$ .

*Motos.* Observamos ali como no início do movimento, quando a velocidade é baixa (ver a Figura 41) e conseqüentemente o arrasto aerodinâmico também é baixo, boa parte da força de propulsão na roda é usada para mudar a inércia (acelerar) a moto. Depois, para velocidades mais altas, quase não há mais disponibilidade para a aceleração, já que quase toda a propulsão é usada para vencer o arrasto. Para o caso dessa moto, a resistência à rolagem é sempre relativamente baixa.

A Figura 43 mostra o mesmo fenômeno, mas agora as potências. Interessante lembrar que  $P = VF$ , então há um certo aplainamento das curvas em relação ao mostrado no caso das forças (42).

A Figura 44 mostra as normais em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $N_t$ , (2)  $N_d$ . Os valores finais para velocidade constante coincidem com a Tabela 6 da apostila *Física Básica das Motos*. Percebe-se que no início do movimento, quando a aceleração é maior, há uma grande transferência de peso para a roda traseira. Mais para o final do movimento, a transferência diminui. No entanto, a normal traseira continua bem mais alta que a dianteira, já que a resultante da força de arrasto aerodinâmico age no centro de pressão da moto, que tende a rotacioná-la para trás.



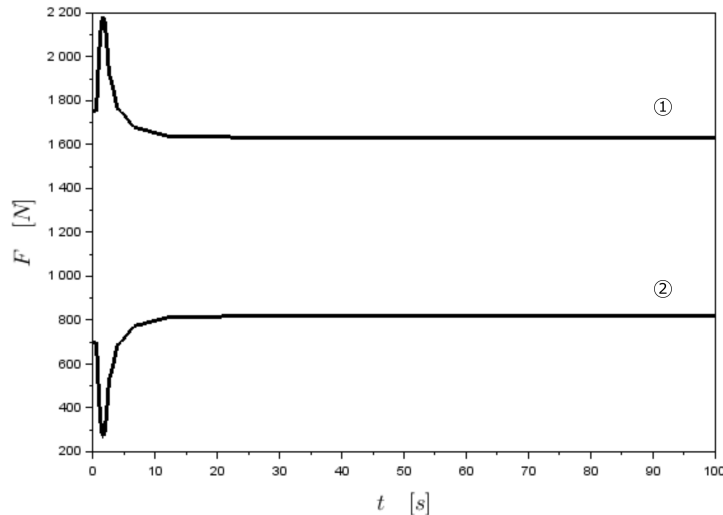


Figura 44: Normais em função do tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $N_t$ , (2)  $N_d$ .

### ***Apostila Solução Computacional do Movimento das Motos***

A Figura 45 mostra o efeito do motor variável no movimento da moto. A Curva 1 é o Caso Base já mostrado na Figura 41, para motor variável. A Curva 2 é a simulação considerando  $P_{\max,roda,const}$  constante (usando o valor da Tabela 1), que coincide com o Caso Base da Figura 9 da apostila *Solução Computacional do Movimento das Motos*. A aceleração maior no caso de potência constante é maior para velocidades menores porque ali usa-se a primeira marcha. Para velocidades maiores, as marchas maiores aproveitam a parte da curva do motor com maior potência, diminuindo a diferença entre os dois casos. Voltando para a Curva 1 da Figura 43, vê-se como a potência disponível na roda é praticamente constante para velocidades maiores, com exceção do início da curva, até cerca de 5 segundos. Aquele início de movimento é o responsável pela diferença inicial entre as Curvas 1 e 2 da Figura 45.

### **Influência da Curva do Motor**

Podemos ver agora como a curva do motor influencia no comportamento da moto. Para isso, voltemos aos três motores da Figura 27. O motor **M1** é o Caso Base com os valores da Tabela 1; o motor **M2** tem a rotação de torque máximo,  $\omega_{motor,T_{pico}}$ , reduzida para 4000 (o que aumenta a potência

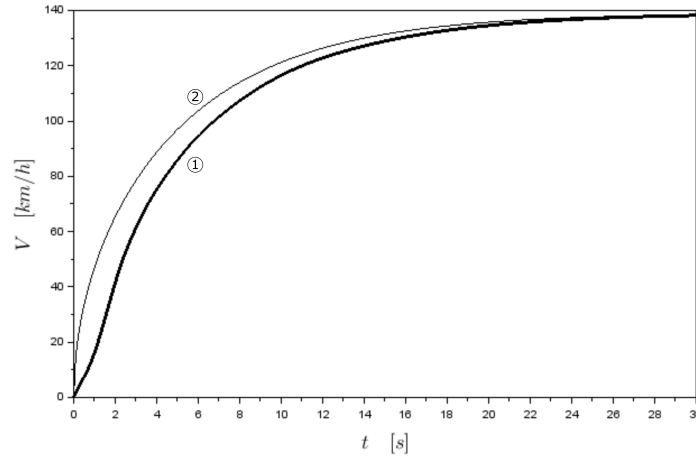


Figura 45: Evolução da velocidade com o tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1) Caso Base, (2) quase o mesmo, mas usando  $P_{\max,roda,const}$  constante como o da Tabela 1, que coincide com o Caso Base da Figura 9 da apostila *Solução Computacional do Movimento das Motos*.

máxima para rotações mais baixas, mas sem aumentar a potência máxima em rotações mais altas); e o motor **M3** tem a potência de pico  $P_{\text{pico}}$  reduzida para 80% do Caso Base (o que tem impacto na curva de potência máxima do motor em todas as rotações). A Figura 46 mostra as curvas de torque dos três motores. Embora a diferença em torque pareça impressionante, o efeito sobre o movimento da moto é relativamente baixo, já que a potência na roda é mais importante. O torque de pico ( $T_{\text{pico}}$ ) do motor **M1** é 35,2 Nm (3,6 kgf.m, @5.500 rpm), do motor **M2** é 40,6 Nm (4,1 kgf.m, @4.000 rpm), e do motor **M3** é 28,1 Nm (2,9 kgf.m, @5.500 rpm).

As Figuras 47—50 mostram a evolução da velocidade de motos com esses três motores. A diferença entre elas está apenas na apresentação, *i.e.*,  $V = f(t)$  ou  $V = f(x)$ , e se está mostrado o movimento completo ou apenas o início do trajeto. Como esperado, vê-se que a moto com o motor **M3** (menos potente) acelera menos e tem menor velocidade máxima. Comparando as motos com motor **M1** e **M2**, observa-se que a diferença se dá apenas no início do movimento, com velocidades mais baixas, caso em que a maior potência em baixas rotações do **M1** faz a diferença na primeira marcha. Para velocidades mais altas, e conseqüentemente marchas mais altas, a rotação do motor sempre é mais alta, não fazendo diferença então qual dos motores está sendo usado.

A Figura 51 mostra a diferença da potência na roda para o caso do motor

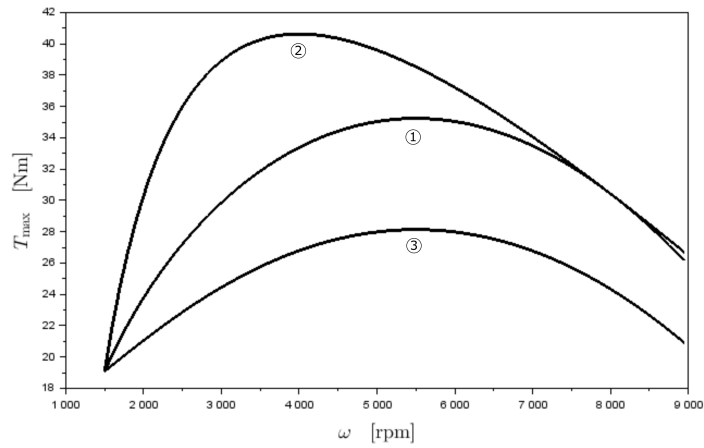


Figura 46:  $T_{\text{motor,max}}$  para (1) valores da Tabela 1 (motor **M1**), (2)  $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 (motor **M2**), (3)  $P_{\text{pico}}$  reduzida para 80% (motor **M3**).

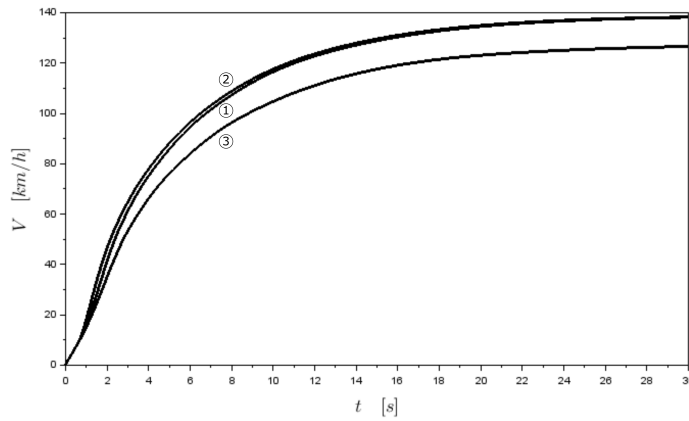


Figura 47: Evolução da velocidade com o tempo para  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1) motor **M1**, Caso Base, (2) motor **M2**, ( $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 rpm, (3) motor **M3**,  $P_{\text{pico}}$  reduzida para 80%. Curvas relacionadas com as da Figura 27.

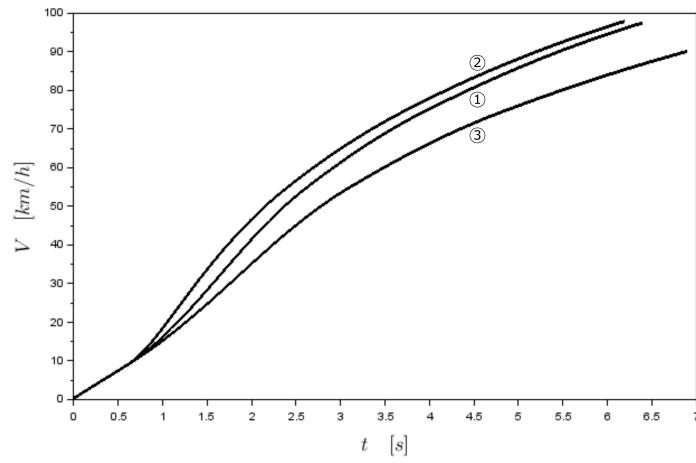


Figura 48: Detalhe da Figura 47.

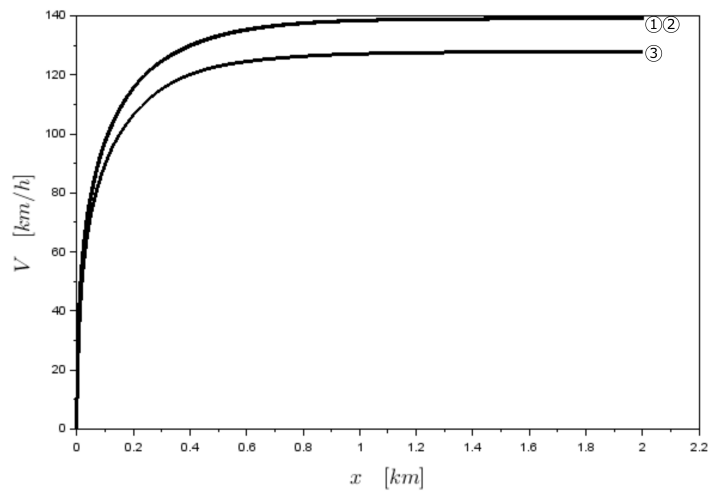


Figura 49: Mesmas curvas da Figura 47, mas agora  $V$  função de  $x$ .

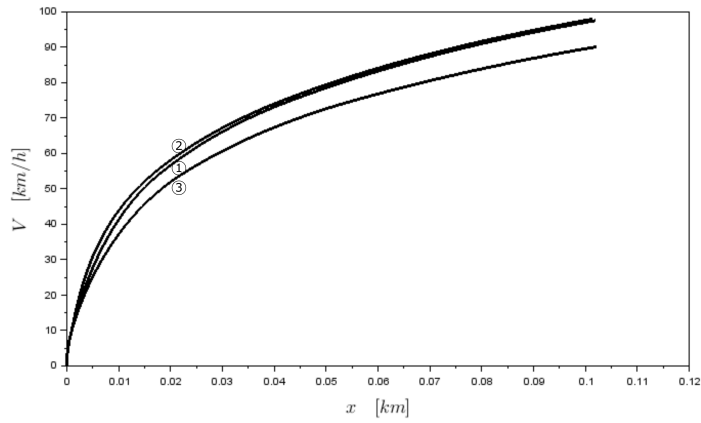


Figura 50: Detalhe da Figura 49. Mesmas curvas da Figura 47, mas agora  $V$  função de  $x$ .

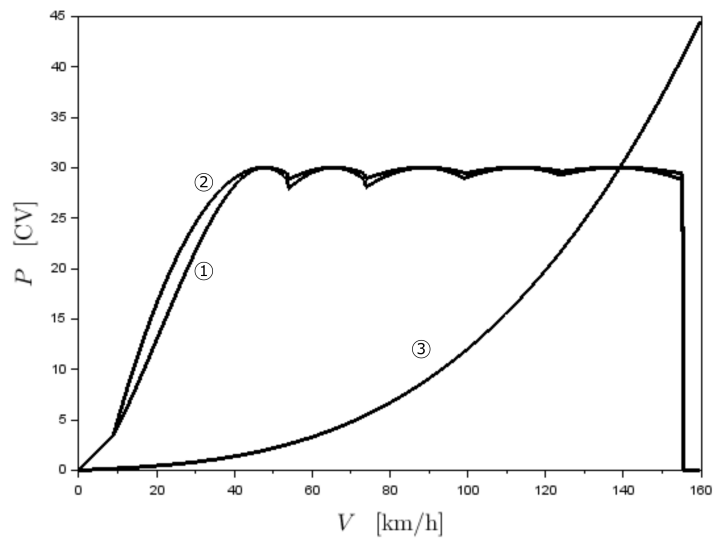


Figura 51: Potência em função da velocidade para o caso  $\alpha = 1$  e (1) valores das Tabelas 1, 2 e 4 (2)  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 rpm, e (3)  $P_{\text{res}}$ . (1) e (3) são semelhantes à Figura 40.

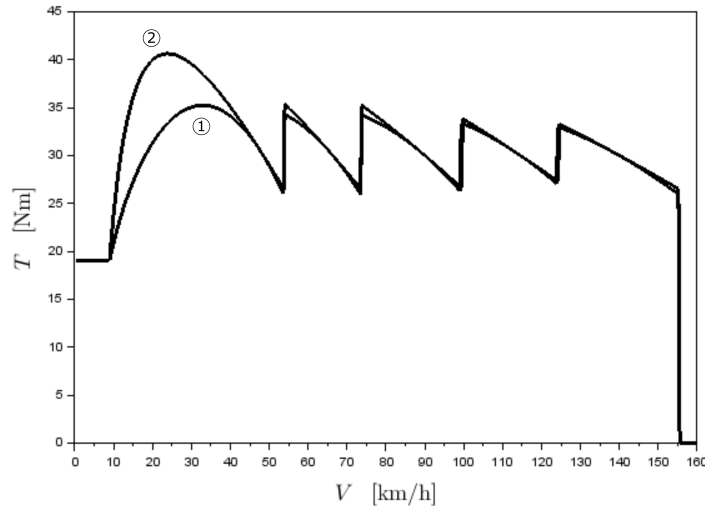


Figura 52: Torque máximo no motor em função da velocidade para o caso  $\alpha = 1$  e (1) valores das Tabelas 1, 2 e 4 (2)  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 rpm.

**M1** (Curva 1) e **M2** (Curva 2). Conforme discutido no parágrafo anterior, vê-se que há diferença apenas para velocidades mais baixas. A Curva 3 mostra a potência resistiva da moto em função da velocidade, mostrando que na velocidade máxima (139 km/h), as duas motos têm a mesma potência.

As Figuras 52 e 53 mostram o torque máximo no motor,  $T_{\text{max, motor}}$ , e a força máxima de propulsão disponível na roda,  $F_{\text{pro, max}}$ , para as motos com os motores **M1** e **M2**. Embora esses dois gráficos possam aparentar uma grande diferença entre as motos, vê-se na Figura 47 como esse maior torque do motor (que tem influência na potência em rotações mais baixas), tem uma relativa baixa influência no comportamento da moto como um todo. Na verdade, para acelerar mais a moto é importante ter maior potência ou menor massa, e para ter maior velocidade máxima é importante ter maior potência ou menor fator de arrasto aerodinâmico.

Mesmo que o torque do motor (maior potência em rotações mais baixas) tenha certa influência nas largadas, outros fatores devem ser levados em conta. Por exemplo, a Figura 54 mostra algumas forças para a moto com motor **M1** durante seu trajeto. A Curva 1 mostra a força máxima na roda ( $F_{\text{pro, max}}$ ), a Curva 2 a força de atrito disponível na roda traseira ( $F_{\text{at, disp, t}} = \mu N_d$ ), e a Curva 3 a normal dianteira ( $N_d$ ). Se o piloto tentar usar toda a potência do motor durante a aceleração, vê-se que a moto não vai empinar, já que a normal dianteira é positiva. No entanto, não há atrito disponível

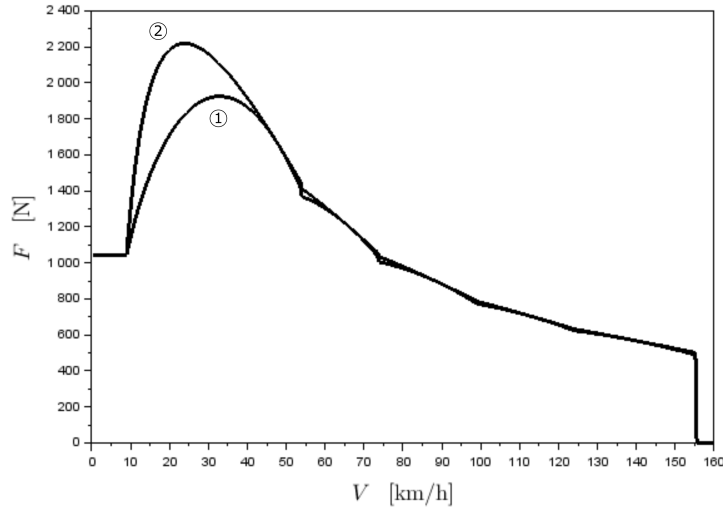


Figura 53: Força na roda em função da velocidade para o caso  $\alpha = 1$  e (1) valores das Tabelas 1, 2 e 4 (2)  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 rpm.

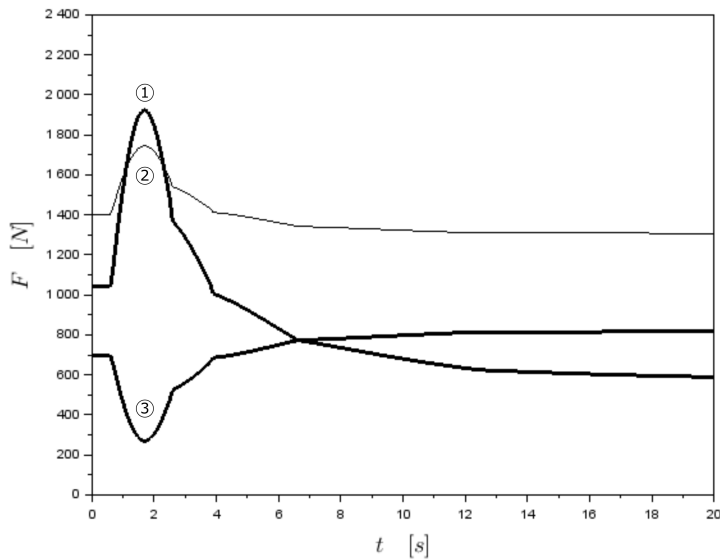


Figura 54: Força na roda em função do tempo para o caso  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4: (1)  $F_{\text{pro}}$ , (2)  $F_{\text{at,disp,t}}$ , e (3)  $N_{\text{d}}$ .

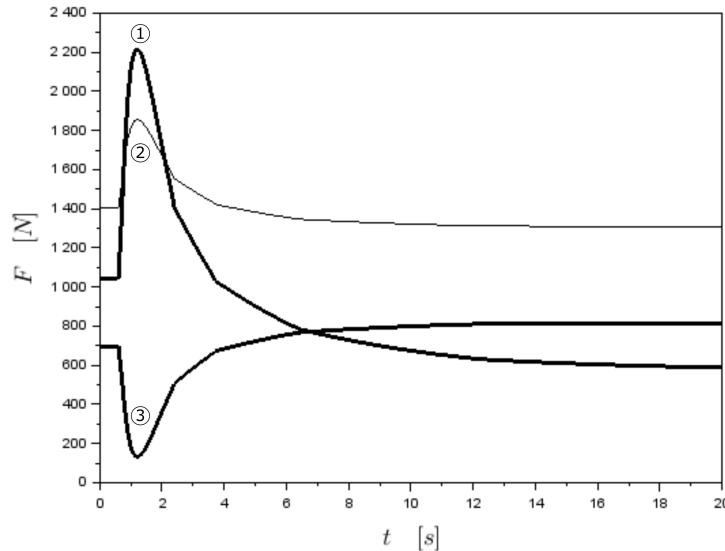


Figura 55: Força na roda em função do tempo para o caso  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4, mas com  $\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$  reduzida para 4000 rpm: (1)  $F_{\text{pro}}$ , (2)  $F_{\text{at,disp,t}}$ , e (3)  $N_d$ .

na roda traseira, então o pneu vai deslizar. Portanto, se alguém tentar fazer o mesmo com uma moto com maior potência em rotações mais baixas, o problema de deslizamento será maior ainda, como mostra a Figura 55.

### Influência da Transmissão

A Figura 56 mostra o que acontece com a curva de potência quando modificamos a relação final. No Caso Base<sup>41</sup>, Curva 1, a relação final era  $\xi_{\text{final}} = 2,6$ , e na Curva 2 modificamos esse valor para  $\xi_{\text{final}} = 2,9$ . A moto com a relação final de 2,9 tem maior potência nas velocidades mais baixas, mas, por outro lado, atinge a rotação máxima na quinta marcha em aproximadamente 139 km/h. A moto do Case Base, por outro lado, atingia a rotação máxima em aproximadamente 155 km/h. Qual é a melhor? Vamos ver a curva da potência das resistências. Na Curva 3, a moto está em uma pista horizontal,  $\theta=0^\circ$ . Na Curva 4, a moto está em um declive de  $\theta=-4^\circ$ . Então, se a moto for rodar na pista horizontal, é melhor ter uma relação final de  $\xi_{\text{final}} = 2,9$ , pois ela não tem potência para andar a mais de 139 km/h ( $P_{\text{pro}} = P_{\text{res}}$ ). Agora, se a moto for rodar no declive, seria melhor a moto com  $\xi_{\text{final}} = 2,6$ , pois as duas

<sup>41</sup>Tabelas 1, 2 e 4



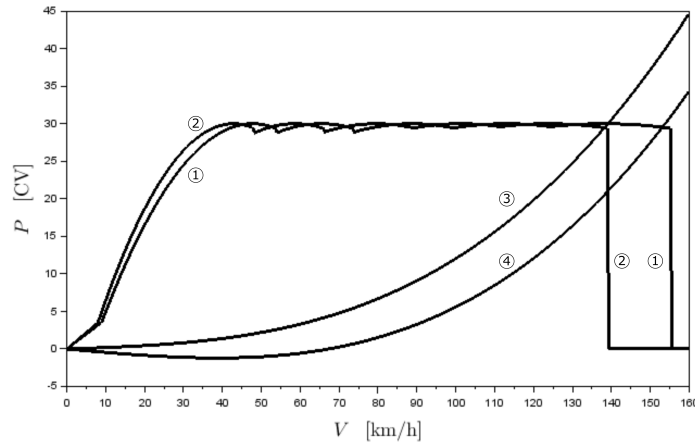


Figura 56: (1) Potência na roda em função da velocidade para o caso  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4, (2) aumentando  $\xi_{\text{final}}$  para 2,9 na Tabela 2, (3)  $P_{\text{res}}$  para o Caso Base, e (4)  $P_{\text{res}}$  mudando  $\theta$  para  $4^\circ$ .

potências só seriam iguais por volta de 155 km/h. Portanto, concluímos que o projeto da transmissão da moto depende muito do motor, mas também de onde essa moto vai rodar.

### Eficiências e Economia

Nesta última seção, vamos avaliar o consumo da moto em várias situações. Os resultados estão compilados na Tabela 7. Em todos os casos a moto roda 2 km de distância. Os três primeiros casos são os das motos com motor **M1**, **M2** e **M3**, largando do repouso até atingirem a velocidade máxima. Os casos 4 e 5 são de motos que já largam da velocidade máxima que atingirão (as duas usam o motor **M1**, a primeira com  $\alpha = 1$  e a segunda com  $\alpha = 0,8$ ). As duas últimas motos usam o motor **M1**, conforme o comportamento mostrado na Figura 57. Nessa figura, a Curva 1 mostra o caso 1 ( $\alpha = 1$ ), a Curva 2 mostra o caso 6 ( $\alpha = 0,8$ ), e a Curva 3 o caso 7, onde o piloto usa  $\alpha = 1$  até atingir 128 km/h, depois usa  $\alpha = 0,8$ .

Vamos destacar agora alguns resultados da Tabela 7. Olhando para os casos 1-3, vemos que a maior aceleração se dá para a moto com motor **M2**, que o maior tempo para percorrer os 2 km foi para a moto com motor **M3**. Ainda a moto do caso 3 foi a que apresentou a melhor economia, já que teve a menor energia dissipada na forma de arrasto aerodinâmico. Analisando os casos 4 e 5, a moto que partiu de 139 km/h obviamente foi a que levou o menor tempo, enquanto a moto que partiu de 128 km/h (não precisou acelerar e

Tabela 7: Influência do motor no comportamento da motocicleta

Variáveis		Casos						
		1	2	3	4	5	6	7
		<i>parâmetros</i>						
$P_{\text{pico}}$	CV	34,7	34,7	27,7	34,7	34,7	34,7	34,7
$\omega_{\text{motor}, T_{\text{pico}}}$	rpm	5500	4000	5500	5500	5500	5500	5500
$\alpha$	—	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	0,8	1,0/0,8
$V_0$	km/h	0	0	0	139	128	0	0
		<i>resultados</i>						
$V_{\text{max}}$	km/h	139	139	128	139	128	128	128
$L_{0,99V}$	km	0,83	0,82	0,85	—	—	0,85	0,34
$\Delta t_{30 \text{ km/h}}$	s	1,6	1,4	1,8	—	—	2,1	1,6
$\Delta t_{60 \text{ km/h}}$	s	3,0	2,7	3,5	—	—	2,8	3,0
$\Delta t_{100 \text{ km/h}}$	s	6,8	6,5	8,8	—	—	9,1	6,8
$\Delta t_{\text{total}}$	s	57,4	57,2	62,3	51,8	56,4	62,5	60,6
$\tau_{\text{aer}}$	%	22	22	22	26	26	21	22
$\tau_{\text{ine}}$	%	4	4	4	0	0	3	4
$\eta_{\text{pro}}$	%	28	28	29	28	29	28	28
$\eta_{\text{transp}}$	%	1	1	1	0	0	1	1
$E_{\text{comb}}$	MJ	4,34	4,34	3,69	4,02	3,37	3,81	3,87
$E_{\text{aer}}$	MJ	0,95	0,95	0,81	1,05	0,88	0,80	0,84
$E_{\text{ine}}$	MJ	0,19	0,19	0,16	0	0	0,16	0,16
$\epsilon$	km/litro	14,3	14,3	16,8	15,5	18,4	16,3	16,0

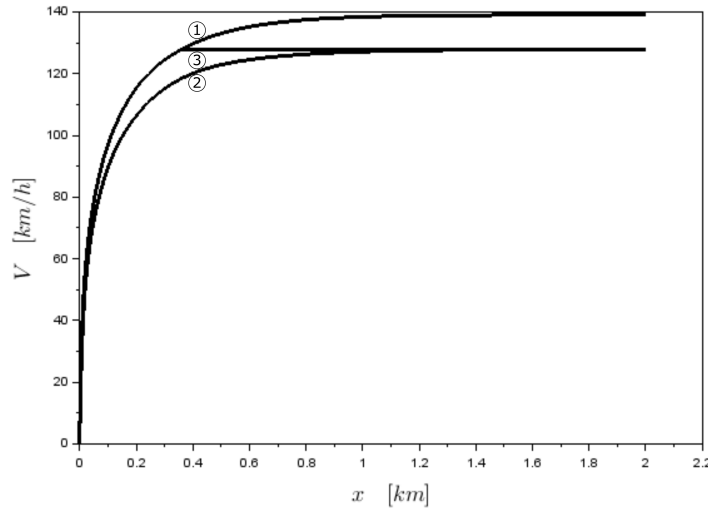


Figura 57: Evolução da velocidade com a distância para (1)  $\alpha = 1$  e valores das Tabelas 1, 2 e 4, (2) reduzindo  $\alpha$  para 0,8, e (3)  $\alpha = 1$  até atingir 128 km/h e depois  $\alpha = 0,8$ .

teve menor arrasto aerodinâmico) teve melhor economia. Finalmente, casos 6 e 7, vemos que as motos têm economias parecidas. Interessante que a moto que acelerou mais rápido (caso 7) teve menor economia não por ter acelerado mais rápido, mas sim por ter ficado mais tempo com maior arrasto aerodinâmico<sup>42</sup>.

## 5 Conclusão

Nas apostilas passadas estudamos as motos primeiro de uma forma bastante genérica (*Visões das Motocicletas*), depois a partir de uma visão física, mas apenas por fora (*Física Básica das Motos e Solução Computacional do Movimento das Motos*). Nesta apostila começamos a olhar para dentro das motos, para a transmissão em particular, e na próxima olharemos especificamente para dentro do motor. Mais para a frente, voltaremos a estudar o piloto e, finalizando, analisaremos a moto do ponto de vista financeiro, levando em conta seu custo de aquisição, operação, tempo perdido e outros.

Como sempre, é interessante que o estudante tente deduzir estas equações, rode as listagens do *Scilab*, reproduza os estudos mostrados aqui e faça

<sup>42</sup>Vamos investigar isso melhor na próxima apostila, sobre motores, mas de qualquer forma é um resultado inesperado.

os seus próprios estudos. Seguem agora algumas sugestões para atividades adicionais:

1. Variar a curva de eficiência do motor para estudar melhor a diferença de economia entre os casos 6 e 7 da Tabela 7. Assim, será possível determinar qual a influência do motor e qual a influência do tempo em velocidade mais alta.
2. Ajustar a curva/mapa de motor para uma nuvem de pontos experimentais, não para pontos específicos como fizemos aqui.
3. Ajustar o torque de pico no lugar de ajustar a rotação na qual ele ocorre
4. Escolher a marcha com melhor eficiência no lugar da marcha de maior potência.
5. Fazer  $P_{\text{int}}$  variando em função da rotação
6. Implementar o freio motor.
7. Considerar a redução no peso da moto conforme o combustível é consumido.

# Bibliografia

- Abdo, Edward. *Modern Motorcycle Technology*. 2012.
- Bosch. *Manual da Tecnologia Automotiva*. 2007.
- Cameron, Kevin. *The Grand Prix Motorcycle: The Official Technical History*. 2009.
- Clarke, Massimo. *Modern Motorcycle Technology: How Every Part of Your Motorcycle Works*. 2010.
- Haynes, John. *Motorcycle Basics Techbook*. Haynes Manuals, Inc., 2002.
- Heisler, Heinz. *Advanced Engine Technology*. 1995.
- Hoag, Kevin L. *Vehicular Engine Design*. 2006.
- Magnani, Fábio. *Física Básica das Motos*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Solução Computacional do Movimento das Motos*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Visões das Motocicletas*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- Martyr, A. J. e Plint, M. A. *Engine Testing: Theory and Practice*. 3a. 2007.
- Spalding, Neil. *MotoGP Technology*. 2010.
- Zimmerman, Mark. *The Essential Guide to Motorcycle Maintenance*. Whitehorse Press, 2004.